Über die Genauigkeit von Beobachtungsreihen

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Senatsrat i. R., Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **29** (3), S. 57–60

1931

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN
ORGAN
des
ÖSTERREICHISCHEN VEREINS FÜR VERMESSUNGSWESEN.
Redaktion:
Hofrat Prof. Dr. Dr. Dr. h. c. E. Doležal und Vermessungsrat Ing. H. Rohrer.

Nr. 3. Baden bei Wien, im Juni 1931. XXIX. Jahrg.

Über die Genauigkeit von Beobachtungsreihen.

Von Senatsrat S. Wellisch.

Zur Prüfung der Zuverlässigkeit der aus Häufigkeitsbeobachtungen gewonnenen Ergebnisse bedient man sich als Fehlermaß am zweckmäßigsten des mittleren Fehlers. Zuweilen finden aber auch der durchschnittliche und der wahrscheinliche Fehler Verwendung. Bei Berechnung der zulässigen Schwankungsbreite oder Streuungsstrecke wird als maximaler Grenzfehler einer Beobachtung, der noch nicht als grober Fehler anzusehen ist, am sichersten der 3-fache mittlere Fehler m angenommen. Es kann aber auch der $3^3/_4$-fache durchschnittliche Fehler d oder der $4^1/_2$-fache wahrscheinliche Fehler w, wenn auch mit geringerer Sicherheit, hiezu verwendet werden, wie dies aus den nachstehenden, annähernd geltenden Beziehungen hervorgeht:

$$m = \tfrac{5}{4}\, d = \tfrac{3}{2}\, w$$
$$d = \tfrac{4}{5}\, m = \tfrac{6}{5}\, w$$
$$w = \tfrac{2}{3}\, m = \tfrac{5}{6}\, d$$
$$3\,m = 3{,}75\, d = 4{,}5\, w.$$

Es wäre daher gefehlt, bei Anwendung des (in der Biologie, Vererbungslehre und anderen Wissenszweigen oft irrtümlich als „mittleren" Fehler bezeichneten) durchschnittlichen oder wahrscheinlichen Fehlers den für den mittleren „quadratischen" Fehler allein geltenden Faktor 3 anstatt 3,75 bzw. 4,5 zu gebrauchen, wie dies bei biometrischen Untersuchungen manchmal zu geschehen pflegt. Wie irrig die auf den Gebrauch eines falschen Faktors gegründeten Beurteilungen von Variationsreihen ausfallen können, möge an einem zurechtgelegten Zahlenbeispiel näher ausgeführt werden.

Es seien drei Reihen zu je fünf Beobachtungen (wiederholte Messungen einer und derselben Strecke oder Messungen desselben Elementes an verschiedenen Exemplaren) erhalten worden. Aus allen drei Reihen ergibt sich „zufällig" das gleiche arithmetische Mittel $L = 26{,}190$. Aber die drei charakteristischen Fehlermaße

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

$$d = \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$w = \frac{[\sqrt{|v|}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}$$

fallen in allen drei Reihen verschieden aus, wie dies aus den drei Täfelchen zu ersehen ist.

1. Reihe.

l in m	v in cm	vv	$\sqrt{\|v\|}$	Genauigkeitsmaße
26,150	+ 4,0	16,00	2,00	$m_1 = \pm$ **4,03**
26,156	+ 3,4	11,56	1,84	$d_1 = \pm 3,31$
26,193	− 0,3	0,09	0,55	
26,201	− 1,1	1,21	1,05	$w_1 = \pm 2,78$
26,250	− 6,0	36,00	2,45	$h_1 = 0,176$
L = 26,190	14,8	64,86	7,89	

2. Reihe.

l in m	v in cm	vv	$\sqrt{\|v\|}$	Genauigkeitsmaße
26,140	+ 5,0	25,00	2,24	$m_2 = \pm 4,85$
26,150	+ 4,0	16,00	2,00	$d_2 = \pm$ **4,03**
26,190	0,0	0,00	0,00	
26,210	− 2,0	4,00	1,41	$w_2 = \pm 3,08$
26,260	− 7,0	49,00	2,65	$h_2 = 0,146$
L = 26,190	18,0	94,00	8,30	

3. Reihe.

l in m	v in cm	vv	$\sqrt{\|v\|}$	Genauigkeitsmaße
26,130	+ 6,0	36,00	2,45	$m_3 = \pm 5,97$
26,135	+ 5,5	30,25	2,34	$d_3 = \pm 5,14$
26,190	0,0	0,00	0,00	
26,225	− 3,5	12,25	1,87	$w_3 = \pm$ **4,03**
26,270	− 8,0	64,00	2,83	$h_3 = 0,118$
L = 26,190	23,0	142,50	9,49	

Anmerkungsweise sei bemerkt, daß bei einer großen Anzahl von Beobachtungen oder wenn die scheinbaren Fehler v den Charakter von wahren Fehlern ε annehmen, in den Formeln für die charakteristischen Fehlermaße unbedenklich n statt $n-1$ gesetzt werden kann. Die Fehlerformeln vereinfachen sich dann wie folgt:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \qquad d = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \qquad w = \left(\frac{[\sqrt{|\varepsilon|}]}{n}\right)^2.$$

Die charakteristischen Fehler des Mittelwertes L sind bestimmt durch die Ausdrücke:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad D = \frac{d}{\sqrt{n}} \qquad W = \frac{w}{\sqrt{n}}.$$

Es sind insbesondere in unserem Beispiele aus der ersten Reihe der mittlere, aus der zweiten Reihe der durchschnittliche und aus der dritten Reihe der wahrscheinliche Fehler „zufällig" einander gleich

$$\frac{m_1}{\sqrt{n}} = \frac{d_2}{\sqrt{n}} = \frac{w_3}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}03}{\sqrt{5}} = 1{,}80.$$

Aber der Maximalfehler des zu den verschieden genauen Reihen gehörigen Mittelwertes ist dann bestimmt durch folgende Größen:

in der 1. Reihe . . . . . $1{,}80 \times 3 = 5{,}40$

in der 2. Reihe . . . . . $1{,}80 \times 3{,}75 = 6{,}75$ oder sicherer $\dfrac{4{,}85}{\sqrt{5}} \times 3 = 6{,}50$

in der 3. Reihe . . . . . $1{,}80 \times 4{,}5 = 8{,}10$ oder sicherer $\dfrac{5{,}97}{\sqrt{5}} \times 3 = 8{,}01$

Demnach lautet der Mittelwert, gewonnen aus der

1. Reihe . . . . $L_1 = 26{,}190 \pm 0{,}054$
2. Reihe . . . . $L_2 = 26{,}190 \pm 0{,}065$
3. Reihe . . . . $L_3 = 26{,}190 \pm 0{,}080$

Er ist um so genauer, zwischen je engeren Grenzen er zu liegen kommt. Im vorliegenden Falle ist das aus der ersten Reihe erhaltene Ergebnis das genaueste, das aus der dritten Reihe gewonnene das ungenaueste. Wird, wie dies manchmal irrtümlich zu geschehen pflegt, in einem besonderen Falle mit dem 3-fachen mittleren Fehler, ein andermal mit dem 3-fachen (anstatt richtig mit dem $3^3/_4$-fachen) durchschnittlichen Fehler gerechnet, so betrachtet man irrtümlicherweise die zweite Variationsreihe um 25% genauer, als sie tatsächlich ist, was bei Beurteilung verschiedener Reihen zu irrigen Schlußfolgerungen führen kann.

Die unmittelbare Ermittlung des Genauigkeitsmaßes erfolgt am sichersten bei Benützung des mittleren Fehlers aus

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}.$$

Es beträgt in den drei Reihen auf zwei Dezimalen abgerundet

$$h_1 = 0{,}18, \qquad h_2 = 0{,}15, \qquad h_3 = 0{,}12.$$

Daher bestehen die Genauigkeitsverhältnisse:

$$h_1 : h_2 : h_3 = 6 : 5 : 4$$

und die Gewichtsverhältnisse:

$$g_1 : g_2 : g_3 = 36 : 25 : 16.$$

Ist eine Reihe von Beobachtungen um die Hälfte (um 50%) genauer als eine vorgegebene, so ist ihr wahrscheinlicher Fehler gleich dem mittleren Fehler der gegebenen, ist sie jedoch bloß um ein Viertel (um 25%) genauer, so ist ihr durchschnittlicher Fehler gleich dem mittleren Fehler der gegebenen Reihe. Näheres über diesen Gegenstand enthält mein Aufsatz: „Zahlenkritische Betrachtungen in der Biometrik" in der „Zeitschr. f. induktive Abstammungs- und Vererbungslehre" (Bd. LI, 1929, S. 375—389).

Studie über amtliche Fehlergrenzen.

Von Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich in Wien.

Nach den Sätzen der Fehlertheorie hat das Auftreten eines beliebig großen Fehlers eine wenn auch kleine Wahrscheinlichkeit. Wenn nur eine genügend große Zahl von Beobachtungen zur Verfügung steht, läßt sich das Auftreten von Fehlern, die größer sind als die amtlichen Fehlergrenzen, auch theoretisch rechtfertigen. Bei der Festsetzung von Fehlergrenzen werden also immer theoretische Schwierigkeiten auftreten und P. Gast hat in seiner Abhandlung „Über die Behandlung von Fehlergrenzen" in der D. Z. f. Vermessungswesen 1929 Seite 513 ff. Winke gegeben, um diese Schwierigkeiten zu verrringen.

In der vorliegenden Abhandlung soll gezeigt werden, daß das Wesentliche eigentlich nicht so sehr die Festsetzung einer Fehlergrenze ist (eine exakte Theorie des Maximalfehlers kann es bekanntlich nie geben), sondern daß die Einhaltung eines bestimmten mittleren Fehlers m von den Beobachtungen gefordert werden muß. Für diese Beobachtungen gilt dann der m. F. m nicht mehr als sklavische Grenze, sondern ein Teil (wie später gezeigt wird zirka zwei Drittel) muß den m. F. m unterbieten und der Rest, also zirka ein Drittel der Beobachtungen, kann größer als m sein.

Bisher wurde bei der Festsetzung der amtlichen Fehlergrenzen meist so vorgegangen, daß Formeln mit möglichst einfachen Koeffizienten aufgestellt wurden, die strikte einzuhalten waren. Bei jeder Überschreitung dieser a. F. hat also eine Nachmessung zu geschehen oder die betreffende Beobachtung wird für die weitere Berechnung nicht berücksichtigt. Bei einer Revision von Vermessungsoperaten wird dieses dann leider oft nur nach der Zahl dieser Überschreitungen beurteilt. Es ist aber sicherlich gewagt, eine größere Zahl von Beobachtungen nach einer verhältnismäßig geringen Zahl von Überschreitungen der Fehlergrenze zu beurteilen.

Man sollte im Gegenteil von der Gesamtzahl der Beobachtungen auf die Zahl der theoretisch möglichen Überschreitungen der Fehlergrenzen schließen. Dies ist aber nicht immer möglich, da bei den meisten amtlichen Fehlergrenzen nicht bekannt ist, auf Grund welchen mittleren Fehlers sie erstellt wurden.

Bei den Festsetzungen von amtlichen Fehlergrenzen sollten drei Momente in den Vordergrund treten: