Paper-ID: VGI_193109

Studie über amtliche Fehlergrenzen

Karl Ulbrich [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **29** (3), S. 60–65

1931

BibTeX:

```
@ARTICLE{Ulbrich_VGI_193109,
Title = {Studie {\"u}ber amtliche Fehlergrenzen},
Author = {Ulbrich, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {60--65},
Number = {3},
Year = {1931},
Volume = {29}
}
```

Ist eine Reihe von Beobachtungen um die Hälfte (um 50%) genauer als eine vorgegebene, so ist ihr wahrscheinlicher Fehler gleich dem mittleren Fehler der gegebenen, ist sie jedoch bloß um ein Viertel (um 25%) genauer, so ist ihr durchschnittlicher Fehler gleich dem mittleren Fehler der gegebenen Reihe. Näheres über diesen Gegenstand enthält mein Aufsatz: „Zahlenkritische Betrachtungen in der Biometrik" in der „Zeitschr. f. induktive Abstammungs- und Vererbungslehre" (Bd. LI, 1929, S. 375—389).

Studie über amtliche Fehlergrenzen.

Von Ing. Dr. techn. Karl Ulbrich in Wien.

Nach den Sätzen der Fehlertheorie hat das Auftreten eines beliebig großen Fehlers eine wenn auch kleine Wahrscheinlichkeit. Wenn nur eine genügend große Zahl von Beobachtungen zur Verfügung steht, läßt sich das Auftreten von Fehlern, die größer sind als die amtlichen Fehlergrenzen, auch theoretisch rechtfertigen. Bei der Festsetzung von Fehlergrenzen werden also immer theoretische Schwierigkeiten auftreten und P. Gast hat in seiner Abhandlung „Über die Behandlung von Fehlergrenzen" in der D. Z. f. Vermessungswesen 1929 Seite 513 ff. Winke gegeben, um diese Schwierigkeiten zu verrringen.

In der vorliegenden Abhandlung soll gezeigt werden, daß das Wesentliche eigentlich nicht so sehr die Festsetzung einer Fehlergrenze ist (eine exakte Theorie des Maximalfehlers kann es bekanntlich nie geben), sondern daß die Einhaltung eines bestimmten mittleren Fehlers m von den Beobachtungen gefordert werden muß. Für diese Beobachtungen gilt dann der m. F. m nicht mehr als sklavische Grenze, sondern ein Teil (wie später gezeigt wird zirka zwei Drittel) muß den m. F. m unterbieten und der Rest, also zirka ein Drittel der Beobachtungen, kann größer als m sein.

Bisher wurde bei der Festsetzung der amtlichen Fehlergrenzen meist so vorgegangen, daß Formeln mit möglichst einfachen Koeffizienten aufgestellt wurden, die strikte einzuhalten waren. Bei jeder Überschreitung dieser a. F. hat also eine Nachmessung zu geschehen oder die betreffende Beobachtung wird für die weitere Berechnung nicht berücksichtigt. Bei einer Revision von Vermessungsoperaten wird dieses dann leider oft nur nach der Zahl dieser Überschreitungen beurteilt. Es ist aber sicherlich gewagt, eine größere Zahl von Beobachtungen nach einer verhältnismäßig geringen Zahl von Überschreitungen der Fehlergrenze zu beurteilen.

Man sollte im Gegenteil von der Gesamtzahl der Beobachtungen auf die Zahl der theoretisch möglichen Überschreitungen der Fehlergrenzen schließen. Dies ist aber nicht immer möglich, da bei den meisten amtlichen Fehlergrenzen nicht bekannt ist, auf Grund welchen mittleren Fehlers sie erstellt wurden.

Bei den Festsetzungen von amtlichen Fehlergrenzen sollten drei Momente in den Vordergrund treten:

1. Bestimmung des **m i t t l e r e n F e h l e r s** *m*, der eingehalten werden soll.
2. Bestimmung der amtlichen Fehlergrenze (Maximalfehler) als Vielfaches des mittleren Fehlers *m*.
3. Richtige Anwendung der amtlichen Fehlergrenze in der Praxis.

ad 1) Die amtlichen Fehlergrenzen haben u. a. auch den Zweck, die Genauigkeit der Vermessungen bis zu einem gewissen Grade zu stabilisieren. Sehr wichtig ist dies in Ländern, wo verschiedene Behörden und Ingenieure Vermessungen durchführen. Da hiebei mit verschiedenen Aufnahmsmethoden und ungleicher Genauigkeit gearbeitet wird, wäre eine sehr ungleichmäßiges Vermessungsoperat zu befürchten, eine Ungleichmäßigkeit, die sich zumeist in Verschlechterungen äußert.

Hier sollten nun die a. F. eine gewisse Schranke ziehen. Meines Erachtens ist aber durch die bloße Angabe einer Fehlergrenze lange nicht alles getan. Wenn nämlich jemand seine Messungen bloß so durchführt, daß alle gerade noch knapp unter der a. F. liegen, so hat der Betreffende zwar dem bloßen Buchstaben der Einhaltung der Fehlergrenze Genüge getan, aber nach den bekannten Verteilungsgesetzen der Beobachtungsfehler wurde der m. F., dessen Einhaltung durch die a. F. beabsichtigt war, weit überboten.

Erst die richtige Verteilung der Beobachtungsfehler innerhalb der Fehlergrenzen verbürgt auch die sinngemäße Erfüllung der a. F. Diese Verteilung sollte nach der Theorie bei 1000 Beobachtungen wie in Tabelle 1 erfolgen.

Tabelle 1.

Intervall des m. F. *m*	Zahl der Beobachtungen
0—*m*	682
m—1·5 *m*	184
1·5 *m*—2 *m*	88
2 *m*—2·5 *m*	33
2·5 *m*—3 *m*	10
über 3 *m*	3
	1000

Es ist also vor allem die genaue Kenntnis des m. F. *m* nötig, der unter durchschnittlichen Verhältnissen bei den Messungen zu erwarten ist. Diese m. F. verschafft man sich auf empirischem Wege durch Untersuchung einer möglichst großen Zahl von bereits gemachten Messungen. Auf Grund dieser Kenntnis kann dann leicht bestimmt werden, welche m. F. in Zukunft als Grundlage für die a. F. Geltung haben sollen.

Wichtig ist, daß auch für verschiedene Geländeformen oder für verschieden wertvolle Gebiete verschiedene m. F. festgesetzt werden.

ad 2) Erst wenn bestimmte m. F. gewählt sind, kann an die Festsetzung der a. F. geschritten werden. Diese soll nur durch einfache Multiplikation des m. F. geschehen. Wenn die Fehlerformel aus mehreren Gliedern besteht, wäre es verfehlt, willkürlich jedes Glied einem schöneren Koeffizienten zuliebe mit einem wesentlich anderen Faktor zu multiplizieren. Es ist verfehlt, wenn man annimmt, daß die Größe dieses Faktors das Hauptmoment der Fehlergrenze sei.

Jordan selbst sagt in seinem Handbuch für Vermessungskunde I. Band:

„Die praktische Bedeutung des Maximalfehlers ist nicht erheblich. Wenn es sich in der Landmessung darum handelt, Fehlergrenzen für die Brauchbarkeit von Messungen aufzustellen, so wird weniger der Maximalfehler als die für die Zwecke der Aufnahme erforderliche Genauigkeit zu berücksichtigen sein.“

Auch R. Vogeler hat in seiner Abhandlung „Der Maximalfehler und die amtlichen Fehlergrenzen; ferner Vergleichung einer Reihe zufälliger Ereignisse mit dem Fehlergesetz“, D. Z. f. Vermessungswesen 1907 S. 129 ff., darauf hingewiesen, daß dieser Faktor überhaupt nicht allgemein bestimmt werden kann.

Es ist gedanklich unrichtig, daß man für ungenaue Messungen z. B. den sechsfachen statt den üblichen dreifachen m. F. als Maximalfehler annimmt. Man müßte vielmehr sagen, daß für ungenauere Messungen der m. F. doppelt so groß, also 2 *m* ist und das Dreifache davon, also 6 *m*, den Maximalfehler darstellt.

Die Größe dieses Faktors ist bei richtiger Anwendung von a. F. eigentlich von geringer Bedeutung. In Tabelle 2 wird die Zahl der Beobachtungen bei der eine Überschreitung theoretisch möglich ist, angegeben. Wenn man also z. B. den 2·8fachen m. F. als a. F. definiert, so riskiert man eben, daß ungefähr jede 200. Beobachtung ausfällt und zu wiederholen ist.

Tabelle 2.

Vielfaches des m. F. *m*	Zahl der Beobachtungen für eine Überschreitung
2	22
2·5	81
2·6	108
2·7	145
2·8	196
2·9	270
3	370
4	15.800
5	1,740.000

Unter der Voraussetzung, daß annähernd die richtige Fehlerverteilung nach Tabelle 1 eingehalten wurde, hat die Nachmessung der theoretisch gestatteten Überschreitungen sogar eine kleine, eigentlich gar nicht gewünschte Herabdrückung des m. F. zur Folge.

ad 3) Für die sinngemäße Anwendung von a. F. hat schon P. Gast in seiner Abhandlung eine kleine Prozenttabelle gegeben. Es soll hier an einem größeren Beispiele eine Anleitung gegeben werden.

In Österreich wird die Polarmethode in sehr großem Umfange angewendet. Die Grenzpunkte werden von zwei koordinatenmäßig bekannten Polygon- oder Bindepunkten durch orientierte Richtung und optische Distanzmessung festgelegt. Die Koordinaten des Neupunktes können also zweimal unabhängig voneinander berechnet werden. Die aus den beiden Neupunktskoordinaten bestimmte Lagedifferenz $m_s = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$ wurde zur Genauigkeitsuntersuchung verwendet.

Aus ungefähr 10.000 Doppelbeobachtungen wurde der mittlere Fehler für doppelt bestimmte Grenzpunkte bei optischer Distanzmessung mit dem Boßhardt-Zeiss-Reduktionstachymeter (siehe Z. f. Instrumentenkunde Berlin 1931) wie folgt bestimmt, wobei $s = s_1 + s_2$ die Summe der beiden Zielstrahlen und m_s die mittlere Lagedifferenz der beiden Punktbestimmungen darstellt:

$$m_s = 0{\cdot}0024 \sqrt{s} + 0{\cdot}024$$

Tabelle 3.

Intervalle von $s = s_1 + s_2$ in Metern	Zahl der Grenzpunkte im Bereiche von:						
	$0-m$	$m-1{\cdot}5m$	$1{\cdot}5m-2m$	$2m-2{\cdot}5m$	$2{\cdot}5m-3m$	über m	Summe
0—40	2	2	—	—	—	—	4
40—57	4	13	5	2	—	1	25
57—77	32	11	3	2	1	—	49
77—92	146	58	15	4	—	—	223
92—109	188	78	23	1	1	2	293
109—127	177	71	32	8	1	—	289
127—147	72	26	11	1	3	—	113
147—167	136	72	26	10	2	—	246
167—190	116	63	18	4	2	1	204
190—213	56	25	12	6	1	—	100
über 213	6	5	2	—	—	—	13
Summe Istwert	935	424	147	38	11	4	1559
Wahrscheinlichkeit	0·6827	0·1837	0·0881	0·0331	0·0097	0·0027	
Theoretischer Sollwert	1065	286	137	52	15	4	$W \times 1559$
Soll—Ist	+ 130	— 138	— 10	+ 14	+ 4	0	

Die 1559 doppelt bestimmten Grenzpunkte einer Gemeinde wurden durch einfache Zählung nach der Größe der Lagedifferenz in sechs Gruppen geteilt.

(Siehe Tabelle 3.) Der tatsächlichen Anzahl in jeder der sechs Gruppen wurde die auf Grund der Tabelle 1 berechnete theoretische Anzahl gegenübergestellt.

Nimmt man, wie es meist üblich ist, den dreifachen m. F. als Maximalfehler an, so ersieht man, daß sowohl praktisch als auch theoretisch vier Überschreitungen vorhanden sind. Man könnte also daraus (zu Unrecht) auf die richtige Einhaltung der a. F. schließen.

In Österreich kommt aber bloß der 2·5fache m. F. als a. F. zur Anwendung.

$$\triangle s = 0{\cdot}006 \sqrt{s} + 0{\cdot}06$$

Bei Anwendung dieser Fehlergrenze sind in der Praxis 15 Überschreitungen vorgekommen, während sogar 19 theoretisch erlaubt sind. Man könnte also daraus (ebenfalls zu Unrecht) schließen, daß sogar die a. F. unterboten sei. Es ist aber sicher gewagt, die Einhaltung des gewünschten m. F. zuerst durch 4 und dann durch 15 Beobachtungen bei allen 1559 Beobachtungen zu erzwingen, wie es ja durch die a. F. geschehen soll. Im angeführten Beispiel sieht man, daß in der Gruppe für m_s — 1·5 m_s statt theoretisch 286 deren 424 Beobachtungen liegen. Dafür sind in der 1. Gruppe statt 1065 bloß 935 Beobachtungen vorhanden. Diese 935 Beobachtungen sollten, wie man aus Wahrscheinlichkeitstafeln feststellen kann, bloß im Intervall von 0 — 0·8 m_s liegen. Da aber damit tatsächlich das Intervall von 0 — 1·0 m_s ausgefüllt wurde, ist dies ein Beweis, daß in dieser Gemeinde der m. F. um 0·2 m_s größer ist. In dieser Gemeinde wurde trotz der scheinbar sehr guten Einhaltung der a. F. diese in Form eines größeren m. F., der hier ungefähr 1·2 m_s statt wie beabsichtigt 1·0 m_s beträgt, überschritten.

Diese Überschreitung des m. F. ist durch sehr stark hügeliges Gelände zu erklären.

Diese Konstatierung wurde aber mittels 1359 Beobachtungen gemacht, ist also ziemlich zuverlässig. Dieses Beispiel wurde ohne Konstruktion aus der Praxis genommen. Es ist aber sehr wahrscheinlich, daß besonders bei kleineren Einmessungen mit weniger Beobachtungen viel krassere Fälle auftreten werden.

Aus all dem angeführten ist ersichtlich, daß es für kleine Einmessungen mit wenig Beobachtungen stets schwer sein wird, eine passende Fehlergrenze zu erstellen.

Für größere Vermessungsoperate dürfte es aber sehr zweckmäßig sein, die Fehlerverteilung durch Auszählen zu bestimmen und die nötigen Folgerungen zu ziehen.

Dadurch läßt sich m. E. der sicherste und zuverlässigste Maßstab für die Güte der Operatsteile erlangen. Die wenig hiefür aufgewendete Zeit dürfte sich dadurch reichlich lohnen.

Zusammenfassung.

1. Vor allem ist der gewünschte einzuhaltende mittlere Fehler zu bestimmen. Dieser mittlere Fehler wäre für verschiedene Verhältnisse abzustufen.

2. Es ist ein gewisses Vielfache des m. F. als amtliche Fehlergrenze festzusetzen. Bei größeren Vermessungsoperaten ist diese Festsetzung belangloser,

da durch Auszählen eine bessere Möglichkeit zur Einhaltung der a. F. besteht. Infolgedessen könnte in diesem Falle die a. F. etwas höher sein, z. B. dreifach. Bei kleineren Vermessungen empfiehlt sich eine engere Fehlergrenze, z. B. 2·5fach, um eine unrichtige Anwendung in der Praxis möglichst zu verhindern.

3. Abgesehen von der Höhe der Fehlergrenze müssen mindestens ungefähr zwei Drittel der Beobachtungen unter dem einfachen m. F. liegen. Ist diese Bedingung nicht eingehalten worden, so läßt sich durch Auszählen leicht feststellen, wie weit der m. F. überboten wurde. Ob diese Überschreitung gestattet werden kann, ist natürlich Sache einer eigenen Überlegung.

4. Falls die a. F. indirekt überschritten wurde, gibt keine Fehlergrenze eine sichere Weisung, welche Beobachtungen wiederholt werden müßten, um die m. F. auf das geforderte Maß herabzudrücken.

Ein Heliotrop in Verbindung mit einem Scheinwerfer.

Von Vermessungsrat Ing. Hans Rohrer.

Bei der Neubeobachtung des österreichischen Dreiecksnetzes I. Ordnung und bei den Azimutmessungen in diesem Netze werden die Ziele bei Tag grundsätzlich mit Heliotroplicht und bei Nacht mit Scheinwerferlicht signalisiert. Dies geschieht bei Tag vor allem deshalb, damit Auffassungsfehler, die beim Einstellen auf einseitig beleuchtete Pyramiden leicht auftreten können, möglichst ausgeschaltet werden.

Zum Heliotropieren wird in letzterer Zeit vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen ein nach Angabe des Bundesamtes in der Werkstätte für

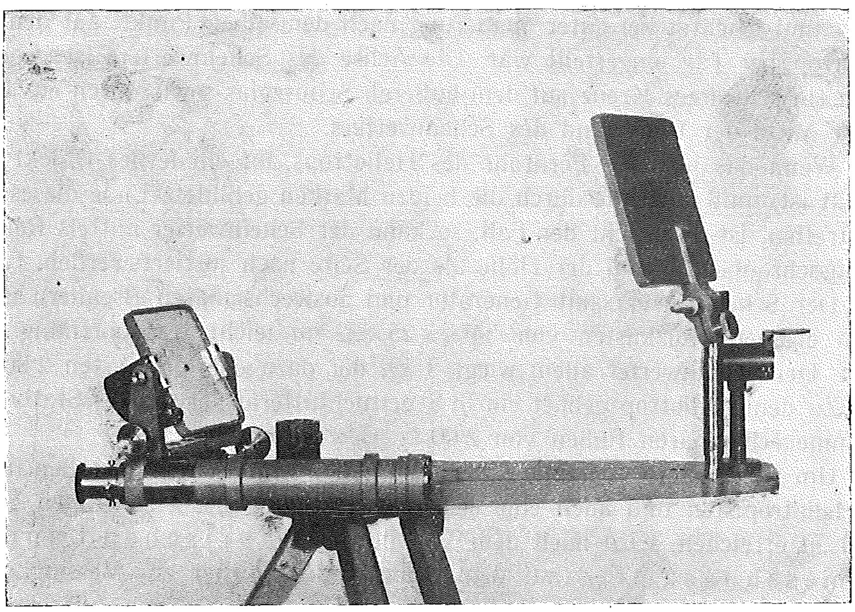

Abb. 1.