Theorie und Praxis der Berechnung des mittleren Punktlagefehlers beim mehrfachen Einschneiden

Josef Kovarik [1]

[1] *1110 Wien Neugebäudestr. 18/10. Stiege T. 7*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **56** (2), S. 53–58

1968

Theorie und Praxis der Berechnung des mittleren Punktlagefehlers beim mehrfachen Einschneiden.

Von *Josef Kovarik*, Wien

Bekanntlich wird die Genauigkeit, mit der die lagemäßige Bestimmung eines trigonometrischen Punktes erfolgt, am anschaulichsten durch eine Fehlerellipse dargestellt.

In der Literatur, z. B. [1], [2], [3], werden für die „mittlere" Fehlerellipse (nach Helmert) die Richtung der großen Achse, sowie die beiden Halbachsen praktisch immer mit den gleichen Gebrauchsformeln angegeben:

$$tg\,2\theta = \frac{[-2ab]}{[bb-aa]} \qquad A = \pm m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}}$$

$$B = \pm m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}}$$

(Der Einfachheit halber sei hier von unterschiedlichen Gewichten abgesehen.)

Die letzten beiden dieser Formeln, für die Halbachsen, enthalten, wie man sieht, neben W auch noch die Koeffizientendeterminante D des Normalgleichungsschemas, die meist eine mehr oder weniger große Zahl ist. Nun mag dieser Umstand bei einer rechnerischen Ausgleichung nicht besonders schwer ins Gewicht fallen, bei graphischen Bearbeitungen ist das jedoch zweifelsohne einer einfachen und schnellen Genauigkeitsbestimmung hinderlich.

Wie der Verfasser schon in [4] erwähnt hat, besteht zwischen W und D eine einfache Beziehung, die es gestattet, die Formeln für die Halbachsen in einer Form zu schreiben, die die Berechnung der Koeffizientendeterminante nicht mehr erfordert:

$$\left.\begin{aligned} A &= \pm m\sqrt{\frac{2}{[aa]+[bb]-W}} = \pm m\sqrt{\frac{2}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]-W}} \\ B &= \pm m\sqrt{\frac{2}{[aa]+[bb]+W}} = \pm m\sqrt{\frac{2}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]+W}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

da ja $[aa]+[bb] = \left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]$ ist.

Der totale, mittlere Punktlagefehler ist $M = \pm\sqrt{A^2+B^2} = \pm\sqrt{m_x^2+m_y^2}$,

mit (1) ergibt sich $M = \pm m\sqrt{\frac{2}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]-W} + \frac{2}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]+W}}$ und daraus

$$M = \pm 2\, m \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]\left(1 - \frac{W^2}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]^2}\right)}} \qquad \ldots (2)$$

Bekanntlich ist $W = \sqrt{[bb - aa]^2 + [-2ab]^2}$, welche Formel man auch schreiben kann $W = \sqrt{\left[\frac{\rho^2}{s^2} \cdot \cos 2\nu\right]^2 + \left[\frac{\rho^2}{s^2} \cdot \sin 2\nu\right]^2} \qquad \ldots (3)$

Diese Form von W sagt, daß je zwei gegebene Festpunkte in der gleichen Entfernung, deren Strahlen im Neupunkt aufeinander senkrecht stehen, sich in ihren Einflüssen gegenseitig aufheben. Da man aber in der Praxis bei Punkteinschaltungen immer mit Überbestimmungen arbeitet, wird W im Verhältnis zu $\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]$ stets ein mehr oder weniger kleiner Wert sein, weil schon bei einer Richtungswinkelverteilung über $2 \cdot \frac{\pi}{2}$ die einzelnen Glieder der beiden Summanden unter der Wurzel von (3) sich zum Teil gegenseitig aufheben.

$\frac{W}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]}$ ist immer kleiner als 1. Entwickelt man den Klammerausdruck im Nenner von M, so kann man (2) in der Form schreiben

$$M = \pm 2\, m \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{W^2}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]^2} \cdots\right) \qquad \ldots (2a)$$

Die Praxis zeigt, daß sogar bei nur durchschnittlichen Verhältnissen, wenn also die Bestimmungsrichtungen *nicht* ideal verteilt sind, W nicht größer ist als $\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]$. Daher ist das zweite Glied der Reihe in (2a) ungefähr gleich $\frac{1}{8}$. Das heißt, auch bei Vorliegen nicht idealer Verhältnisse wäre der Fehler von M durch Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung nur etwa $\frac{M}{8}$.

Nun wird ja das Verhältnis der beiden Halbachsen der Fehlerellipse nur durch die Lage des Neupunktes in Bezug auf die Festpunkte bestimmt und da der totale Punktlagefehler das entscheidende, also von der Lage des Koordinatensystems unabhängige Kriterium für die Genauigkeit eines Punktes darstellt, soll man M schon am Feld, das heißt möglichst schnell und möglichst einfach, bestimmen können. Dazu ist das erste Glied der Formel (2a), genügend genau, bestens geeignet:

$$M \doteq \pm 2\, m \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]}} \qquad \ldots (4)$$

Alle bisher zitierten Formeln sind zuerst nur für einen mehrfachen Vorwärtsschnitt gedacht. Nun kann man aber bekanntlich auch den Rückwärtsschnitt auf ein Vorwärtseinschneiden zurückführen, wenn man die, die Bedingungen $[a] = 0$ und $[b] = 0$ erfüllenden „reduzierten" Richtungen und Seitenlängen bestimmt. (Bei der graphischen Ausgleichung zum Beispiel werden diese reduzierten Größen mit Hilfe des Schwerpunktes der Fußpunkte der $\frac{c}{s}$-Längen ermittelt.)

Da $[aa]_{red} = [aa] - \frac{[a]\,[a]}{n}$ und $[bb]_{red} = [bb] - \frac{[b]\,[b]}{n}$ ist, wird $\left[\frac{\rho^2}{s^2_{red}}\right] = [aa]_{red} + [bb]_{red} = \left[\frac{\rho^2}{s^2}\right] - \frac{1}{n}([a]\,[a] + [b]\,[b])$. Sind in den Entfernungen der Zielpunkte keine *wesentlichen* Unterschiede, so sind schon bei zwei *wirkungsvollen**) Überbestimmungen, also bei 5 beobachteten Richtungen, die Summen $[a]$ und $[b]$ derart klein, daß sie für die gegenständliche Berechnung vernachlässigt werden können. Dann ist $\left[\frac{\rho^2}{s^2_{red}}\right] \doteq \left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]$. Es könnte daher auch in diesem Fall die Formel (4) Verwendung finden. Ist man sich aber über die Zulässigkeit der genannten Vernachlässigung nicht sicher, dann wird man beim Rückwärtsschnitt mit den *reduzierten* Seitenlängen die Bestimmung vornehmen:

$$M \doteq \pm 2\,m \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{\rho^2}{s^2_{red}}\right]}} \qquad \ldots (4\,a)$$

In der photogrammetrischen Abteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien wird, nach einem Vorschlag des Verfassers, auf die oben beschriebene Art die Genauigkeit der i. a. durch Punkteinschaltungen gewonnenen Paßpunktkoordinaten schon mehrere Jahre hindurch mit bestem Erfolg bestimmt. Dabei zeigt sich immer wieder, daß bei Messungen mit einem genügend genauen Theodolit, der einen geringen mittleren Richtungsfehler leicht zu erreichen gestattet, und bei den meist vorkommenden Zielweiten, etwa bis 6 km, der mittlere Punktlagefehler nur wenige Zentimeter beträgt, so daß sich eine Kenntnis der Fehlerellipse selbst erübrigt.

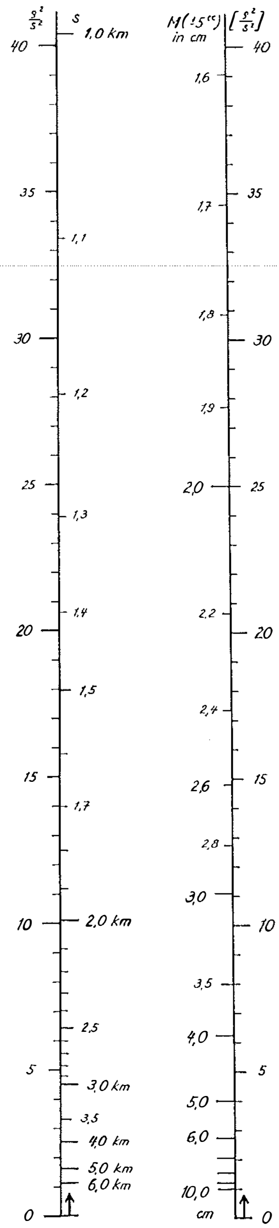
In diesem Sinne sei auch Wolf in [3] zitiert: „. . . Nach amtlichen deutschen Vorschriften soll bei einer Punktbestimmung die große Halbachse A der mittleren Fehlerellipse nicht größer als 15 cm sein. . . . Ist der Wert für den Punktlagefehler schon kleiner als 15 cm, so erübrigt sich die Berechnung der Halbachsen. . . . Daher wird heute die Fehlerellipse nur selten — eben nur in jenen Grenzfällen — berechnet. . . ."

Schließlich sei noch erwähnt, daß man auch unterschiedliche Gewichte leicht berücksichtigen kann. Setzt man nämlich den Quotienten aus der Entfernung durch die Wurzel des jeweiligen Gewichtes $\frac{s}{\sqrt{p}}$ gleich einer Entfernung $\bar{s}$, so ergeben sich für

*) das heißt: nicht etwa nur 4 oder 5^g neben anderen Bestimmungsrichtungen!

die Summen, die mit $\frac{\rho}{s}$ gebildet werden, das sind $[a\sqrt{p}\,.\,a\sqrt{p}]$, ..., schon die Werte $[paa]$, $[pbb]$, ...

An Hand von einigen Beispielen soll jetzt abschließend gezeigt werden, daß die vorgeschlagene Berechnungsart von M von einer kaum mehr zu unterbietenden Einfachheit ist. Handelt es sich um eine rechnerische Ausgleichung der Beobachtungen, dann brauchen nur die im Normalgleichungsschema enthaltenen Summen $[aa]$ und $[bb]$ addiert zu werden und geben schon $\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right]$. Arbeitet man graphisch, dann wird man mit zwei Zahlentabellen oder mit ein für allemal angelegten Leitern einfach und schnell zum Ziel kommen. (Siehe als Konstruktionsvorschlag dazu die Abbildungen 1 und 2.) Natürlich kann man aber z. B. auch die $\frac{\rho^2}{s^2}$-Skala des Horsky-Diagrammes (Rechentafel 7a zur Ermittlung der Richtungs- und Seitenänderungen, 400^g) verwenden und muß nur den 10fachen Betrag des am Maßstab für die Änderungen abgelesenen Wertes nehmen. Die weitere Rechnung, 2facher Richtungsfehler durch die Wurzel aus dem letztgenannten 10fachen Diagrammwert, kann mit jedem kleinen Taschenrechenschieber ausgeführt werden.



Der Übergang auf einen von $\pm 5^{cc}$ stark abweichenden Wert des mittleren Richtungsfehlers m wird am besten so vorgenommen, daß man M zuerst für 5^{cc} ermittelt und anschließend den Wert im Verhältnis $2m:10$ verkleinert bzw. vergrößert. (Ergibt sich z. B. $m = \pm 3^{cc}$, dann wird M im Verhältnis 6:10 verkleinert, eine Rechnung, die sogar leicht im Kopf gemacht werden kann.)

1. Beispiel: es liege ein dreifacher Vorwärtsschnitt vor (mit rechnerischer Ausgleichung), von

1 nach P_0 . . orient. R. 62^g . . . Seite 4,00 km
2 nach P_0 . . orient. R. 184^g . . . Seite 3,76 km
3 nach P_0 . . orient. R. 368^g . . . Seite 3,20 km.

Aus den Normalgleichungen ergeben sich, bei s in cm-Einheiten, $[aa] = 2{,}84$ und $[bb] = 6{,}51$. Daher wird $\left[\frac{\rho^2}{s^2}\right] = 9{,}35$. Der mittlere Richtungsfehler m sei $\pm 5^{cc}$. Damit ist $M = \pm 2.5 \sqrt{\frac{1}{9{,}35}} = \pm \frac{10}{3{,}06} = \pm 3{,}3$ cm.

Das erste vernachlässigte Glied von (2a) kann leicht überschlagen werden, es gibt $0{,}08\,M = 2{,}6$ mm. Da die strenge Berechnung $M = \pm 3{,}6$ cm ergibt, sieht man daraus, daß praktisch die gesamte Differenz gegenüber dem Näherungswert nach (4) in dem ersten vernachlässigten Glied steckt. Die Aussage, daß der Punktlagefehler zwischen 3 und 4 cm liegt, wird aber in der Praxis i. a. bei allen Fällen der Punkteinschaltung genügen.

2. Beispiel: es liege ein Rückwärtsschnitt über 4 gegebenen Punkten vor, also nur mit einer Überbestimmung (mit graphischer Ausgleichung), orientierte Richtungen nach 1 . . . 25^g Seitenlänge . . 3,6 km
nach 2 . . . 65^g Seitenlänge . . 2,0 km
nach 3 . . . 135^g Seitenlänge . . 2,9 km
nach 4 . . . 180^g Seitenlänge . . 3,9 km

Nachdem man in üblicher Weise auf den einzelnen Strahlen die entsprechenden $\frac{\rho}{s}\left(\text{bzw.}\ \frac{c}{s}\right)$ Längen aufgetragen hat (Fußpunkte F), ermittelt man bekanntlich, bei richtungsmäßiger Ausgleichung, graphisch den Schwerpunkt der Fußpunkte und bestimmt aus den Abständen dieses Schwerpunktes von den einzelnen Fußpunkten die reduzierten Seitenlängen

nach	1	2	3	4
s_{red}	$3{,}8_5$ km	3,2 km	4,6 km	$3{,}2_5$ km.

Damit ergibt sich dann $\left[\frac{\rho^2}{s^2_{red}}\right] = 12$ und mit $m = \pm\, 5^{cc}$ erhält man $M =$ $= \pm\, 3$ cm. Zur Kontrolle wurde auch W ermittelt und damit ergab das erste vernachlässigte Glied 4 mm. Zum Vergleich sei auch hier der streng gerechnete Wert mitgeteilt: $M = \pm\, 3{,}4$ cm. Wie man sieht, erhält man die Lagegenauigkeit auch hier, trotzdem nur eine Überbestimmung und keine ideale Verteilung der Richtungen vorliegt, mit einer Schärfe, die für die Beurteilung der Punktqualität in der Praxis vollkommen ausreichend ist.

Liegt aber zu den oben genannten vier Richtungen etwa noch eine zweite Überbestimmung vor, z. B. bei 317^g mit einer Seitenlänge von 2,2 km, dann ist die Horizontverteilung eine wesentlich bessere und man erhält schon mit den gegebenen, also nicht reduzierten Seiten praktisch denselben Wert, wie mit s_{red}, nämlich $M =$ $= \pm\, 1{,}9$ cm. (Zahlenmäßig gerechnet 19,3 mm gegen 18,6 mm.) Der mit der strengen Formel errechnete Wert beträgt demgegenüber $\pm\, 20{,}2$ mm.

Eine lange Reihe solcher Berechnungen hat gezeigt, daß eine derartige Bestimmung der Punktlagefehler am Feld in allen Fällen genau genug ist, da jede strenge Rechnung schon wegen der Unsicherheit im mittleren Fehler einer beobachteten Richtung unsinnig wäre, kann dieser doch erst nach der Punktausgleichung endgültig ermittelt werden.

Aber auch nach der Ausgleichung ist die mit der Näherungsformel erzielte Genauigkeit i. a. ausreichend, da es bedeutungslos ist, ob der betreffende Punkt 3 oder 3,5 cm Lagefehler hat. Die entscheidende Frage ist doch vielmehr die nach der Dimension: cm oder schon dm!

Zusammenfassung

Beim mehrfachen Vorwärts- wie beim mehrfachen Rückwärtsschnitt — und natürlich auch sinngemäß beim kombinierten Einschneiden — kann der totale mittlere Punktlagefehler des Neupunktes mit den angegebenen Formeln (4) bzw. (4a) einfach und schnell bestimmt werden, wenn man sich mit etwa 10% Genauigkeit der ermittelten Größen begnügt. Das wird am Feld, bei der Einmessung, immer und bei der Punktberechnung i. a. dann der Fall sein, wenn der Lagefehler nur wenige cm beträgt. Schließlich ist damit außerdem die Möglichkeit gegeben auch bei *graphischen* Ausgleichungen von mehrfach eingeschnittenen Punkten den mittleren Punktlagefehler einfach, dabei aber trotzdem genügend genau ermitteln zu können.

Literaturhinweise

[1] *Jordan-Eggert*, Handbuch der Vermessungskunde, 1. Band 1935.

[2] *Ackerl*, Geodäsie und Photogrammetrie, 2. Teil 1956.

[3] *Wolf*, Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, im Erscheinen begriffen.

[4] *Kovarik*, Zur graphischen Bestimmung der Fehlerellipse .... Zeitschr. f. Verm. 1952.

Rationellste Basisnetze der Präzisions-Polygonometrie vorgeschriebener Genauigkeit mit Wild-Theodolit T2 und 2m-Invar-Basislatte im Stadtgebiet

Von *Walter Smetana*, Wien

Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen

Zusammenfassung:

Bei Verwendung des üblichen Wild'schen Instrumentariums mit Zwangszentrier-Ausrüstung zur Messung von Präzisions-Polygonzügen verschiedener Längen im Stadtgebiet, und unter Zugrundelegung einer geforderten Polygon-Punktlagegenauigkeit von 1 cm, der parallaktischen- und Polygonwinkel-Meßgenauigkeit mit bzw. $m_\alpha \approx \pm 2^{cc}$, $m_\beta \approx \pm 8^{cc}$, sind in der vorliegenden Arbeit für den Praktiker die jeweils rationellsten Basisnetze errechnet und in einer Tabelle zusammengestellt.

Für die Zugslängen wurde ein Bereich von 500 m bis 1,5 km gewählt. Die Anzahl der Polygonpunkte, einschließlich der beiden Anschlußpunkte eines Zuges, wird hiebei mit 11 bis 31 festgelegt. Weiters können der Tabelle auch noch zulässige Außermittigkeiten der Basislatte, ideale Hilfsbasislängen, sowie Abweichungen von denselben entnommen werden.

1. Einleitung

Bei der Anlage von Hauptpolygonzügen der Präzisions-Polygonometrie im Stadtgebiet wird der Einsatz eines leichten Geodimeters zur elektro-optischen Distanzmessung wohl die rationellste Strecken-Meßmethode darstellen, da besonders auf Grund der diesbezüglichen mathematisch-statistischen Untersuchungen von Geodimeterstrecken nach Peters-Korschineck [1], eine in vielen Fällen auch für Stadtvermessungen geforderte Punktlagegenauigkeit durch den rationellen Einsatz eines Geodimeters erzielt werden kann.