

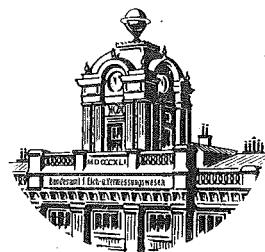
So 9.

Sonderheft 1

der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen

FESTSCHRIFT

EDUARD DOLEŽAL



Herausgegeben vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
Gruppe Vermessungswesen

Eigentümer und Verleger:
Österreichischer Verein für Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1948

Bisher sind folgende Sonderhefte erschienen:

Sonderheft 1: Festschrift Eduard Dolezal, 198 Seiten, Neuauflage 1948
Preis S 18.—

Sonderheft 2: Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme, 40 Seiten, 1935
wird neu aufgelegt

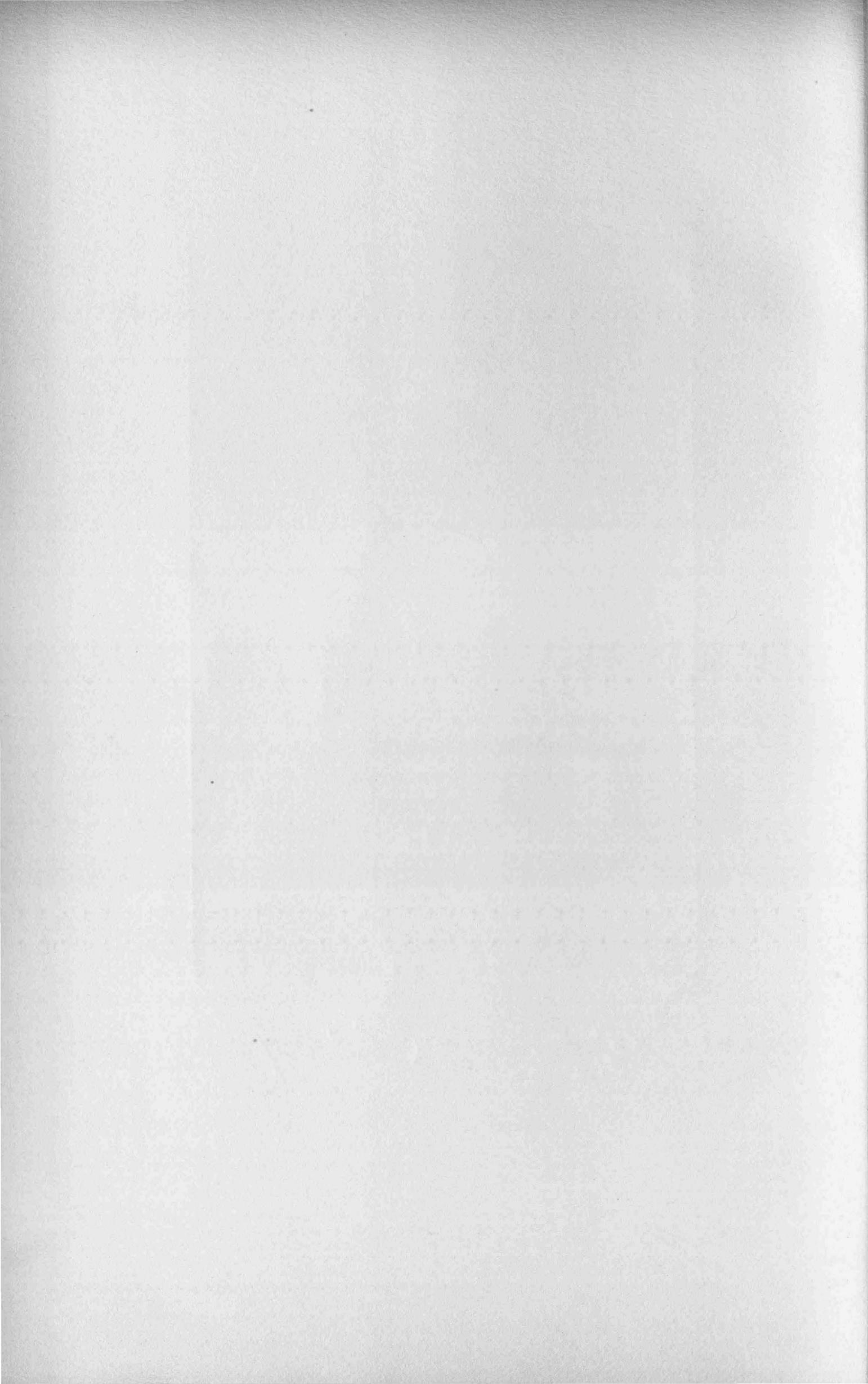
Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid
140 Seiten, 1948 Preis S 25.—

Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie, 40 Seiten, 1948
Preis S 18.—

Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie, 45 Seiten, 1948 Preis S 18.—



Prof. J. E. Poležal.



FESTSCHRIFT
EDUARD DOLEŽAL
ZUM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE
AM 2. MÄRZ 1932

GEWIDMET VOM
**ÖSTERREICHISCHEN VEREIN
FÜR VERMESSUNGWESEN**

Technische Hochschule Wien

Lehrkanzel für Höhere Geodäsie
und Sphärische Astronomie

Zu. Inv. Nr. 809 11

ALLE RECHTE VORBEHALTEN

GEDRUCKT BEI RUDOLF M. ROHRER. BADEN BEI WIEN

WIDMUNG.

Hochverehrter Herr Hofrat!

Ihr heutiger siebziger Geburtstag gibt uns einen willkommenen Anlaß, den Gefühlen unserer höchsten Verehrung, Dankbarkeit und Liebe für Sie, unseren hochverehrten Führer, der vielen von uns auch an der Hochschule Lehrer war, Ausdruck zu geben.

Wir verehren in Ihnen den hervorragenden Lehrer, der mit ungewöhnlicher Beredsamkeit selbst die schwierigsten und trockensten Themen so fesselnd zu gestalten wußte, daß er die Hörer in seinen Bann zwang und ihr Interesse unvermindert festzuhalten vermochte. Ihr Idealismus und die jugendliche Begeisterung, mit der Sie sich stets der Forschung und Ihrer Lehrtätigkeit widmeten, mußte sich auch auf Ihre Schüler übertragen und sie zur Nacheiferung anspornen. Wer das Glück hatte, Ihrem tiefgründigen und dabei so temperamentvollen Vortrage beiwohnen zu dürfen, wird den dabei empfangenen Eindruck nie vergessen und die Liebe und Begeisterung, die Sie ihm damals zum Fache eingeflößt haben, diesem Fache und diesem Lehrer stets bewahren.

Bei den Vermessungsübungen haben Sie wie selten einer es verstanden, Ihre Schüler zur rastlosen Arbeit nicht nur für die Zeit des Studiums, sondern auch für das ganze Leben zu erziehen.

Wir verehren in Ihnen auch den stets hilfsbereiten Freund und Vater der Studenten, der es während seiner ganzen Lehrtätigkeit als eine seiner Pflichten angesehen hat, auch auf das Wohlergehen seiner Schüler, besonders der bedürftigen, bedacht zu sein. Hiebei ist das schöne und edle Menschentum zum Ausdruck gekommen, das sich auch in Ihrer immer gleichbleibenden Gerechtigkeitsliebe allen Ihren Hörern gegenüber kundgetan hat.

Wir verehren in Ihnen den großen Gelehrten, den bahnbrechenden, aufbauenden Forscher, der in allen Gebieten der Geodäsie ungemein schöpferisch tätig ist und besonders an den gewaltigen Fortschritten der Erd- und Luftbildmessung hervorragenden Anteil hat, wodurch der Ruf unseres Vaterlandes auf dem Gebiete der Geodäsie weit über seine Grenzen getragen wurde.

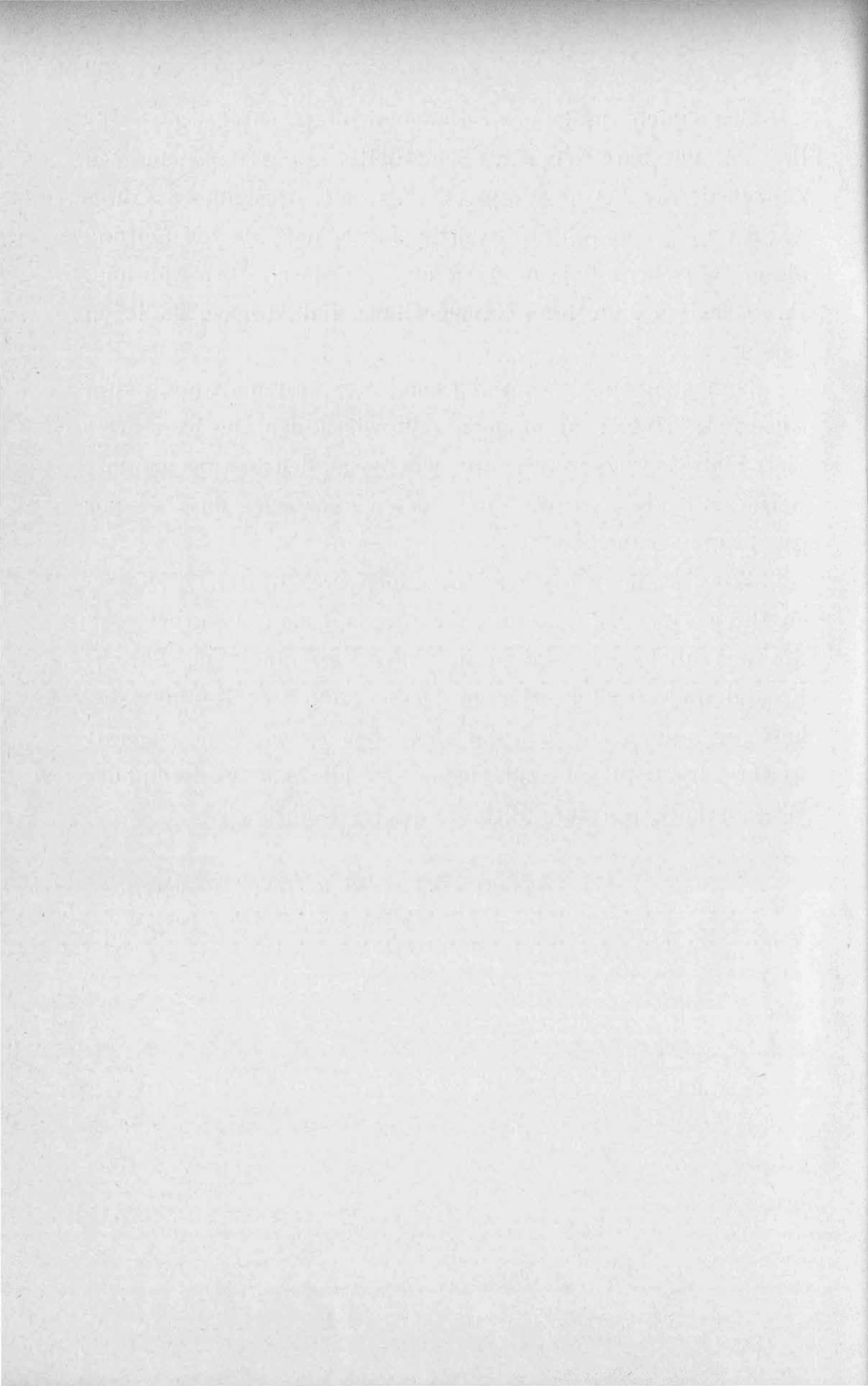
In Ihnen verehren wir den genialen Organisator, der in unermüdlicher Arbeit immer Neues schuf, zur Förderung unseres Faches und unseres Standes. Wir können an dieser Stelle nicht auf all die unvergänglichen Werke eingehen, die Sie zum Schöpfer haben, aber danken müssen wir Ihnen für Ihre selbstlose und zielbewußte Tätigkeit, die Sie uns als Führer, Helfer und Berater in allen unseren Fach- und Standesfragen ange-deihen ließen, denn alles, was die österreichische Geometerschaft in den letzten fünfundzwanzig Jahren an Erfolgen erreicht hat, verdankt sie in erster Linie Ihnen, vor allem die Reform und Ausgestaltung des geodätischen Studiums an den Technischen Hochschulen und die Schaffung des Bundesvermessungsamtes, womit die Vereinheitlichung des gesamten staatlichen Vermessungswesens Österreichs erreicht wurde, Ziele, wofür Sie, hochverehrter Herr Hofrat, jahrzehntelang unentwegt gekämpft haben.

Schließlich danken wir Ihnen an dieser Stelle auch für Ihre unschätzbare Arbeit als Schriftleiter der „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“. Am 1. April dieses Jahres werden es genau fünfundzwanzig Jahre, daß Sie die Leitung dieser Zeitschrift übernommen und ihr durch Ihre Führung, Ihre Arbeiten und Ihren Namen Glanz und Ansehen verliehen haben.

Nun glauben wir, unseren Dank am besten dadurch zum Ausdruck bringen zu können, daß wir Ihnen, hochverehrter Herr Hofrat, versprechen, auf dem Wege, den Sie uns geführt, weiter zu schreiten und dem edlen Beispiele, das Sie uns gegeben, nachzueifern.

Wir beglückwünschen Sie, hochverehrter Herr Hofrat, zu Ihrem Geburtstage und geben der Hoffnung Ausdruck, daß Sie uns noch recht lange in voller Gesundheit als Führer, Freund und Berater erhalten bleiben und mit Ihrem wahrhaft jugendlichen Feuer und Ihrer bekannten Schaffenskraft weiter wirken mögen, zur eigenen Freude, zur Förderung der Wissenschaft und zum Ruhme unseres Vaterlandes.

DER ÖSTERREICHISCHE VEREIN
FÜR VERMESSUNGSWESEN.



INHALT.

Hofrat Professor Dr. Ing., Dr. techn. et Dr. mont. h. c.	} Von F. WINTER, Wien.	IX XXXIV
Eduard Doležal. Lebenslauf.		
Verzeichnis der Schriften Doležals		
ACKERL F., Wien:		
Zur Berechnung von Geoidundulationen aus Schwerkraftstörungen	1	
BASCH A., Wien:		
Zur Fehlertheorie der Verbindungsgeraden geodätisch ermittelter Punkte	8	
BUCHHOLTZ A., Riga:		
Bildpolygonierung bei gleichmäßiger Nadirdistanz und Geländeneigung	18	
DEMMER E., Wien:		
Die neuen Katastralmappen Österreichs	29	
FINSTERWALDER S., München:		
Über die Ausfüllung eines festen Rahmens durch Nadirtriangulation	32	
GROMANN A., Wien:		
Die Vorteile der gegenwärtigen Organisation des bundesstaatlichen Vermessungsdienstes	38	
HAERPFER A., Prag:		
Räumliches Rückwärtseinschneiden aus zwei Festpunkten	41	
HELLEBRAND E., Wien:		
Zur Ausgleichung nach der Methode des größten Produktes nebst einem Beitrag zur Gewichtsverteilung	47	
HOPFNER F., Wien:		
Die Bestimmung der Geoidundulationen aus Schwerkraftwerten	58	
KOPPMAIR J., Graz:		
Das Seitwärtseinschneiden im Raum	61	
LEGO K., Wien:		
Die Aufsuchung und die Wiederherstellung verlorengegangener trigonometrisch bestimmter Punkte	64	
LEVASSEUR K., Wien:		
Grenzpunktberechnung und rechnerische Ausschaltung grober Beobachtungsfehler im Strahlenmeßverfahren	76	
LÖSCHNER H., Brünn:		
Eine Denkmalaufnahme durch einfache Bildmessung	87	
MALY L., Wien:		
Ermittlung der wahrscheinlichsten Punktlage aus Achsenabschnitten	99	

MANEK F., Madrid:	
Projekt einer Katastervermessung Spaniens mittels Luftphotogrammetrie	106
ROHRER H., Wien:	
Die Bestimmung des Verhältnisses der Katastertriangulierung von Tirol zur Gradmessungstriangulierung	112
SCHUMANN R., Wien:	
Über Schwerpunktbeziehungen bei einem fehlerzeigenden Vielecke	120
SÉBOR J., Sopron:	
Die „Aufgabe des unzugänglichen Abstandes,, (Hansen-Problem) in vektor- analytischer Behandlung	127
SKROBANEK F., Wien:	
Der technische Grundgedanke photogrammetrischer Seilaufnahmen	135
THEIMER V., Leoben:	
Über die Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze nach der Methode der Ausgleichung direkter Beobachtungen	143
ULBRICH K., Wien:	
Der Abschlußfehler in langen Polygonzügen	153
WELLISCH S., Wien:	
Über den sphärischen Exzeß	163
WERKMEISTER P., Dresden:	
Gemeinsame Bestimmung der Polhöhe φ und der Uhrkorrektion Δu mit Hilfe von Zenitdistanzen	170
WILSKI P., Aachen:	
Grubengrenzen in alter Zeit	177
ZAAR K., Graz:	
Ergänzungsgeräte zu einem Feldtheodolit für Neuaufnahmszwecke	191

Hofrat

Prof. Dr. Ing., Dr. techn. et Dr. mont. h. c. Eduard Doležal.

Lebenslauf.

Doležal wurde als ältester Sohn eines Webers und Kleinwirtschaftsbesitzers in dem südmährischen Städtchen Budwitz am 2. März 1862 geboren. Nach Absolvierung der fünfklassigen Normalschule seines Geburtsortes besuchte er die dieser Anstalt angegliederte zweiklassige Fortbildungsschule.

Der Leiter der erwähnten Fortbildungsschule und Lehrer der Arithmetik und Geometrie war für den Unterricht dieser Fächer an den Unterklassen der Realschule approbiert. Bemerkenswert ist, daß im Unterrichtsprogramm auch praktische Übungen in der Geometrie mit Absteckstäben und Meßketten vorgesehen waren, die auf einer Wiese des Heimatsortes abgehalten wurden, so daß Doležal schon in seinen Knabenjahren die ersten Grundbegriffe der Vermessungskunde kennen lernte.

Im Jahre 1875 übersiedelte der Vater Doležal's mit seiner vierköpfigen Familie, von harten Schicksalsschlägen heimgesucht, nach Wien, nachdem er durch seine Güte und sein Vertrauen auf die Ehrlichkeit der Mitmenschen sein Vermögen und seinen Besitz verloren hatte.

Trotz der ungünstigen wirtschaftlichen Lage der Eltern wurde dem Knaben der Besuch der Mittelschule ermöglicht.

Ohne Aufnahmsprüfung, lediglich auf Grund seiner Zeugnisse von der Fortbildungsschule wurde Doležal in die erste Klasse der Unterrealschule in Sechshaus bei Wien (später XV. Bezirk, Henriettenplatz) aufgenommen.

In dem Direktor der Realschule Dr. J. Pisko, dem Verfasser der beliebten Lehrbücher der Physik und in dem Lehrer der französischen Sprache, Alexander Löffler, hatte Doležal bald zwei Gönner gefunden; edle Menschen, derer er heute noch dankbarst gedenkt, denn sie allein haben ihm durch Vermittlung von Nachhilfestunden die Aufnahme und Fortsetzung seiner Studien ermöglicht.

Zu jener Zeit war an den Mittelschulen noch die Reihung der Schüler nach dem Grade ihrer Leistungen, die sogenannte Lokation üblich; Doležal war immer Vorzugsschüler, abwechselnd Primus oder der zweite in der Klasse.

Nach Vollendung der Unterrealschule wollte er, um sein auffallendes Zeichentalent zu verwerten und seine Eltern zu entlasten, als Kartenzeichner-Aspirant, Skolare genannt, in das Militärgeographische Institut eintreten. Als Hauptmann Hassingr ihm davon abriet, wandte er sich dem Lehramt für Volksschulen zu und trat nach bestandener Aufnahmsprüfung in den ersten Jahrgang der Lehrerbildungsanstalt in Wien, III., Geusaugasse, ein.

Seine Lehrer waren u. a. der bekannte Pädagoge Niedergesäß, der vorzügliche Methodiker Hofer in Geometrie und Rusch in Geographie.

Schon im ersten Halbjahr erhielt er vom Lande Niederösterreich ein Stipendium.

Da ihn der neue Studiengang nicht befriedigte, kehrte Doležal nach drei Semestern an die Realschule zurück, legte im Jahre 1884 die Maturitätsprüfung mit Auszeichnung ab und wandte sich dem Hochschulstudium zu.

Doležal zeigte schon frühzeitig eine besondere Vorliebe und Veranlagung für Musik. Schon als Oberrealschüler stellte er aus 30 Mitschülern ein Orchester zusammen und veranstaltete und leitete mehrere öffentliche Konzerte. Für die damalige Zeit, wo die Mittelschulen für derartige Dinge wenig übrig hatten, gewiß eine beachtenswerte Besonderheit.

In der Absicht, sich dem Lehramte der Mathematik und Darstellenden Geometrie, bzw. Physik an Mittelschulen zuzuwenden, belegte Doležal an der Technischen Hochschule in Wien die allgemeine Abteilung und Vorlesungen über einschlägige Fächer an der Universität. Hier besuchte er auch, auf Anraten des Professors der Höheren Mathematik Dr. J. Kolbe, den Turnlehrerbildungskurs, in der Hoffnung, mit Hilfe des Turnens rascher zu einer Anstellung an einer Mittelschule zu gelangen.

Doležals Lehrer an der Technischen Hochschule und Universität waren in der Mathematik: v. Escherich, Kolbe, Weyer und Winckler, in der Darstellenden Geometrie: Staudigl, in der Physik: Pierre, Ditscheiner, v. Lang und Stefan und in der Meteorologie: Hann.

Durch diese seine Studien wurde er auf die Anwendungsgebiete der von ihm gepflegten Wissenschaften aufmerksam, was ihn bewog, auch die Vorlesungen und alle Übungen über Reine Mechanik, Technische Mechanik, Hydro- und Baumechanik, Niedere und Höhere Geodäsie, Sphärische und Praktische Astronomie zu besuchen, kurz, er wandte sich mit aller Kraft der Angewandten Mathematik zu.

In der Praktischen Geometrie war Professor Dr. Anton Scheidl, in der Höheren Geodäsie und Sphärischen Astronomie Professor Dr. Wilhelm Tinter sein Lehrer.

Im Februar 1887 legte Doležal die Lehramtsprüfung aus dem Turnen ab, bestand an der Oberrealschule des VII. Wiener Bezirkes (Neubau) die vorgeschriebene Probepraxis und erhielt am 15. September 1887 die Stelle eines Hilfturnlehrers an jener Oberrealschule, an der er vor drei Jahren die Reifeprüfung abgelegt hatte.

Doležal hat seine umfangreichen Hochschulstudien in überaus kurzer Zeit bewältigt, ein sprechendes Zeugnis für seinen Fleiß, seine Tatkraft und Willensstärke. Seine Jugend war eine harte Schule, frühzeitig lernte er den Ernst des Lebens kennen.

Durch Erteilung von Nachhilfeunterricht und praktische Ausübung der Musik mußte er die Mittel zum Studium zum größten Teil selbst aufbringen und nur in den zwei letzten Hochschuljahren brachte ihm ein gräflich Windhag'sches Stipendium fühlbare Erleichterung.

Am 1. Oktober 1887 wurde Doležal zum a. o. Assistenten bei der Lehrkanzel für Praktische Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien ernannt und verzichtete auf die Tätigkeit als Hilfturnlehrer. Zwei Jahre verblieb er in dieser Stellung und hatte Gelegenheit, unter der Leitung

seines ehemaligen Lehrers Professor Dr. Anton Schell den Unterrichtsbetrieb genau kennenzulernen und seine Fachkenntnisse zu vertiefen.

Trotzdem Doležal durch seine Tätigkeit als Hochschul-Assistent weitestgehend in Anspruch genommen worden war, setzte er seine Studien fort und hörte an der Universität Sondervorlesungen über Potentialtheorie, Himmelsmechanik und Bahnbestimmungen bei den Dozenten Adler und v. Heppelger, praktische Astronomie bei Prof. Weiss, sowie an der Technischen Hochschule Vorlesungen über Ausgleichsrechnung und Präzisions-Nivellement bei Professor Dr. Wilhelm Tinter, der sich überdies, seine karg bemessene freie Zeit opfernd, die Mühe nahm, ihn in die Praxis der Positionsbestimmungen einzuführen.

Im Jahre 1888 legte Doležal die Lehramtsprüfung für das Lehramt aus der Stenographie ab, übernahm die Hausarbeiten für das Lehramt aus der Mathematik, der Darstellenden Geometrie und der Pädagogik und legte sie vollendet der Prüfungskommission im Sommer 1889 vor.

Noch im selben Jahre bricht für Doležal ein neuer Lebensabschnitt an durch die Ernennung zum Professor an der neu errichteten Technischen Mittelschule in Sarajevo, in welcher Stellung Doležal nicht nur als Lehrer, sondern auch als Träger europäischer Kultur eine außergewöhnlich rege Tätigkeit entfaltet hat.

Der gemeinsame österreichisch-ungarische Finanzminister v. Kallay, dem die Verwaltung der okkupierten Provinzen Bosnien und der Herzegowina anvertraut war, errichtete nämlich im Jahre 1889 in Sarajevo eine Technische Mittelschule (Staatsgewerbeschule) mit dem Zwecke, für den mittleren technischen Dienst im Bau-, Forst- und später auch im Bergwesen in Theorie und Praxis möglichst gleichmäßig ausgebildete Beamte heranzubilden. Als Vorbildung für den Besuch dieser in erster Linie für Landesangehörige (Serben, Kroaten, Türken und Spaniolen) bestimmten Anstalt wurde die erfolgreiche Absolvierung der Unterklassen der im Okkupationsgebiete damals bestandenen zwei Gymnasien oder dreiklassigen Handelsschulen verlangt. Einen wesentlichen Teil des Unterrichtsprogrammes bildete der Unterricht im Vermessungswesen und die genaue Kenntnis der bosnischen Landes- bzw. Katasteraufnahme, weil die Absolventen der Anstalt auch als Geometereleven im Vermessungsdienst des Landes Verwendung finden sollten.

Durch Vermittlung des bekannten Professors des Maschinenbaues auf der Wiener Technischen Hochschule Hofrat G. Hauffe wurde Doležal nach unmittelbaren Verhandlungen mit dem Minister mit 1. Oktober 1889 als provisorischer Lehrer für die mathematischen Fächer, darunter besonders der Praktischen Geometrie und der Baumechanik, mit der Verpflichtung bestellt, nach zwei Jahren die Vorträge in der Landessprache — serbo-kroatisch — zu halten.

Es zeugt von der Doležal in so hohem Maße eigenen Tatkraft und von seiner Hingabe und Begeisterung für eine übernommene Verpflichtung, daß er die zwei Ferialmonate August und September nicht dazu benützte, sich von seiner aufreibenden Tätigkeit als Hochschulassistent zu erholen, sondern sich nach Sarajevo begab, um dort die fremde Sprache im Verkehr

mit der Bevölkerung zu erlernen und zu üben. Es bestätigt sein Sprachentalent, daß er bei Beginn seiner Lehrtätigkeit im Oktober 1889 im eröffneten I. Jahrgang der Anstalt in den Fächern Mathematik, Darstellende Geometrie, Physik und Chemie die Vorträge sofort in der Landessprache halten konnte.

Im II. Jahrgang wurde der Unterricht in der Praktischen Geometrie aufgenommen und im III. Jahrgang nach folgerichtiger Verbindung der Vorlesungen mit praktischen Übungen im Vermessen und geodätischen Zeichnen abgeschlossen. Außerdem lehrte Doležal im III. Jahrgange der Bauabteilung noch Baumechanik (Festigkeitslehre und Graphische Statik). Nach dem im Jahre 1892 vollzogenen Ausbau der Anstalt behielt er die Fächer: Darstellende Geometrie, Praktische Geometrie und Baumechanik.

Im Juli des Jahres 1892 wurde die erste Maturitätsprüfung im Bau- und Forstwesen unter dem Vorsitze hoher Landesbeamten abgehalten. Sie zeigte, daß die Landeskinder des Okkupationsgebietes mittlere technische Studien mit Erfolg bewältigen können.

Viermal: 1892, 1893, 1894 und 1895 führte Doležal seine Schüler zur Reifeprüfung. Die meisten von ihnen haben es zu hohen Stellungen gebracht. Nikola Spaić ist heute oberster Chef des bosnischen Katasters, andere sind hohe Inspektionsorgane, Jovo Trifković ist Direktor des Kunstateliers in Sarajevo.

Nun einige Worte über den Unterrichtsbetrieb in seinen drei Lehrfächern.

In der Darstellenden Geometrie (I. und II. Jahrgang) wurde in erster Linie „Kotierte Projektion“ behandelt, dann Orthogonale Projektion auf zwei und mehreren Projektionsebenen, Axonometrie und Perspektive.

Lehrreiche theoretische und praktische Beispiele aus dem Hochbau, Straßenbau u. dgl., die im Einvernehmen mit den Fachprofessoren ausgewählt wurden, kamen dem Gesamtstudium zugute. Die erzielten Lehrerfolge gaben der Landesregierung Anlaß, Doležal einzuladen, ein Lehrbuch der Darstellenden Geometrie für Technische Mittelschulen zu verfassen, welchem Antrage er jedoch wegen Arbeitsüberbürdung nicht entsprechen konnte.

In der Praktischen Geometrie im II. und III. Jahrgang mußte Doležal sich den Lehrgang mangels eines geeigneten Lehrbuches selbst schaffen und verlegte den Schwerpunkt des Unterrichtes auf die praktischen Übungen, die er schon damals gliederte in Winterübungen im Lehrsaal (mit Meßgeräten und Instrumenten), in Vorübungen im Freien (von Ostern bis zum Schluß des Sommersemesters an drei Halbtagen in der Woche) und in eine große Vermessungsübung zum Abschlusse des Studienganges, die 15 Tage in Anspruch nahm und das Gebiet der Triangulierung, der Höhenmessung, der Tachymetrie usw. sowie — mit Rücksicht auf den bosnischen Katalster — eine Meßtisch-aufnahme umfaßte.

Auch für die Baumechanik, die im III. Jahrgang gelehrt wurde, stand ein Lehrbuch nicht zur Verfügung. Auf Grundlage der im II. Jahrgang, unterstützt von vielen und gut gewählten Beispielen vorgetragenen elementaren Mechanik konnte Doležal auf die Behandlung der Festigkeitslehre und der graphischen Statik eingehen und schuf nach gründlichen kollegialen Beratungen mit den

Professoren des Bauwesens für diese Fächer einen Lehrgang, der den ungeteilten Beifall aller Fachkollegen und der vorgesetzten Schulbehörde gefunden hat.

Sechs Jahre und drei Monate währte die Lehrtätigkeit Doležal's an der Technischen Mittelschule in Sarajevo. Die Größe der Leistung, die er als Lehrer vollbracht hat, mag daran gemessen werden, daß für seine Fächer fast keine Lehrbehelfe vorhanden waren und von ihm erst geschaffen werden mußten. Das gilt besonders von der Baumechanik und der Praktischen Geometrie, in welchen Fächern von ihm der Unterricht vollständig selbständige eingerichtet werden mußte.

Aber Doležal war nicht nur ein vorbildlicher Lehrer, er entfaltete auch auf den verschiedensten Gebieten des öffentlichen Lebens eine rege und erfolgreiche Tätigkeit als Schriftsteller und Organisator, eingedenk der Worte, die der Minister für die okkupierten Gebiete, v. Kallay, im August 1889, Doležal zum Abschied mit auf den Weg gab: „Sie haben nicht nur als Lehrer an der Technischen Mittelschule zu wirken, sondern Sie haben auch als Träger der Kultur im Okkupationsgebiete tätig zu sein.“

Diese Forderung des Ministers hat Doležal sehr ernst genommen.

Durchdrungen von der Wichtigkeit der körperlichen Erziehung der Jugend, als geprüfter Turnlehrer mit diesem Wissens- und Arbeitsgebiet wohl vertraut, veröffentlichte er in der führenden deutschen Tageszeitung „Bosnische Post“ in den Jahren 1890 bis 1895 eine Reihe von Aufsätzen, die die körperliche Erziehung der Jugend, sportliche Übungen, Jugendspiele u. dgl. m. behandelten.

Im Jahre 1892 wandelte er die bestehende Turnriege in einen Turnverein um, dem Zivil- und Militärpersonen angehörten.

Als großer Musikfreund und selbst ausübender Musiker schuf Doležal zunächst aus Turnern eine Orchesterriege, der im Jahre 1894 die Bildung einer Musikgesellschaft folgte.

Als im Jahre 1894 der begabte und erfahrene Organisator des Volksschulwesens im Okkupationsgebiete Dlustruš den glücklichen und nützlichen Entschluß faßte, zur Fortbildung der Schullehrer die Zeitschrift „Školski vještnik“ (Unterrichts-Nachrichten) zu gründen, bereicherte Doležal ihren Inhalt mit folgenden Aufsätzen:

1. Methoden des geometrischen Unterrichtes.
2. Über Erdmagnetismus und die magnetische Vermessung von Bosnien und der Herzegowina.
3. Über die Tag- und Nachtgleiche.
4. Das Leben und die wissenschaftlichen Arbeiten von Pasteur.
5. Über Röntgenstrahlen.
6. Über die Linde'sche Methode der Verflüssigung der Luft.
7. Über die Anlage einer Heimatkunde.
8. Über Kettenbrüche.

Im Militärwissenschaftlichen- und Kasinoverein in Sarajevo, dem auch Zivilbeamte angehören konnten, und der eine rege Vereinstätigkeit entfaltete, hielt Doležal im Jahre 1894 vor einer ausgewählten vornehmen Zuhörer-

schaft einen äußerst beifällig aufgenommenen Vortrag: „Über die Bedeutung der photographischen Meßkunst“, der in erweiterter Form im Jahre 1896 in Buchform erschien unter dem Titel: „Anwendung der Photographie in der praktischen Meßkunst“, Verlag W. Knapp in Halle a. S. 1896.

Sein Wirken als Lehrer und seine Betätigung im öffentlichen Leben fanden Anerkennung und Förderung durch die bosnische Landesregierung.

In ihrem Auftrage und mit Unterstützung des gemeinsamen Finanzministeriums unternahm Doležal eine Reise nach Deutschland zum Studium der Einrichtung von Baugewerbe- und Forstschulen sowie niederer und mittlerer Bergschulen, die ihn nach Eisleben, Braunschweig, Clausthal, Holzminden, Höxter, Münden und Aschaffenburg führte. Über die Ergebnisse dieser Reise verfaßte er einen 400 Seiten umfassenden druckreichen Bericht mit Vorschlägen für die Ausgestaltung der Technischen Mittelschule, an der er wirkte.

Im Jahre 1895 wurde ihm neuerlich ein Reisekostenbeitrag für geographische Studien im nordwestlichen Teile Bosniens gewährt. Das Ergebnis wurde der Landesregierung in Form eines 100 Seiten umfassenden Berichtes vorgelegt.

Im Jahre 1897 erschien von Doležal im Organ des Landesmuseums in Sarajevo eine Abhandlung „Über den Verlauf der Wasserscheide zwischen dem Pontus und der Adria“, die zwei Jahre später auch in dem Werke „Wissenschaftliche Abhandlungen aus Bosnien“ veröffentlicht wurde.

Weitere Studien über die Hydrographie des Okkupationsgebietes, ferner Untersuchungen über Polje's und Ponore konnten mit Rücksicht auf anderseitige Betätigung nicht mehr vollendet werden.

Neben dieser mannigfaltigen Tätigkeit fand Doležal als Mittelschullehrer noch Zeit, in Hoppe's „Archiv für Mathematik und Physik“ im Jahre 1895 einen Aufsatz „Über partielle Differenzialgleichungen von Regel- und Rotationsflächen“ und im Jahre 1896 einen Aufsatz über „Neue Relationen über die dem Kreise ein- und umgeschriebenen Polygone“ erscheinen zu lassen und für die „Sitzungsberichte der Südslawischen Akademie der Wissenschaften in Agram“ folgende Beiträge zu liefern:

- „Über Rotations- und Regelflächen, 1892.“
- „Über die Auflösung von numerischen Gleichungen, 1893.“
- „Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion, 1894“ und
- „Über den Teilfaktor, 1895.“

Seinen Aufenthalt im Okkupationsgebiete benützte Doležal auch dazu, die bosnisch-herzegowinische Katastralvermessung sowie die militärische topographische Landesaufnahme an den Grenzen gegen Montenegro und dem Sandschak Novi-Bazar gründlich kennen zu lernen und topographisch zu arbeiten.

Doležal gönnte sich keine Erholung. Seine Ferien benützte er ausschließlich zur Teilnahme an Trassierungs- und Absteckarbeiten, an Straßen- und Eisenbahnbauten, Meliorationen und Wasserbauten, wozu ihm gerade in Bosnien die beste Gelegenheit geboten war.

Doležal's Lieblingsbeschäftigung blieb die Photogrammetrie. Schon zu dieser Zeit machte er eine Reihe von Versuchsaufnahmen im Gelände und

an Architekturen mit einer für Photogrammetrie umgearbeiteten Goldmann-Kamera, die ihm vorzügliche Dienste leistete.

Einen Antrag, den ihm der Direktor des bosnischen Katasters, Baron Knobloch, im Jahre 1894 stellte, bei der Katasterbehörde in leitender Stellung einzutreten, lehnte er dankend ab, weil er beim Lehrfach bleiben wollte.

Im Lehrfach sah Doležal seine Lebensaufgabe, dies allein bot ihm die Möglichkeit, einem inneren Drange folgend, mit der heranwachsenden Jugend dauernd verbunden zu bleiben und ihr nicht nur Lehrer, sondern auch Freund zu sein.

Das Element, in dem Doležal leben konnte, war das Lehrfach, sein Lebensziel: an einer Hochschule zu wirken.

Aus seiner Assistentenzeit in Wien kannte er den Hochschulbetrieb, den Lehrvorgang, den Umfang des Unterrichtes und das Lehrziel sehr genau; in Bosnien hatte er durch gründliche Fühlungnahme mit der Praxis — der Anwendung des Gelernten im Leben — die Gelegenheit gefunden, sich ein klares Bild darüber zu bilden, was ein guter Lehrer der Geodäsie wissen und lehren muß, um tüchtige Vermessungsingenieure heranzubilden.

Doležal hatte erkannt, daß die Grundlagen für ein erfolgreiches Studium der Geodäsie mit nachfolgender wissenschaftlicher Betätigung vor allem in der Beherrschung der Mathematik, der Physik, besonders der Optik, der Darstellenden Geometrie und der Sphärischen Astronomie liegen; daß der Lehrer der Geodäsie mit dem weiten Gebiet der Kartographie und ihrem Zweige der Projektionslehre vollkommen vertraut sein, daß er die Praxis des Katastergeometers von der Triangulierung bis zur Katasterkarte und die Praxis im Dienste des Bauingenieurs auf seinen vielseitigen Arbeitsgebieten sowie die Vermessungstätigkeit des Topographen im Dienste der Landesaufnahme sehr genau kennen muß und daß er schließlich unbedingt auch ein guter, auf hohe Genauigkeit der Darstellung bedachter Zeichner sein soll, um den Ansprüchen, die an Pläne und topographische Karten gestellt werden, gewachsen und zur zeichnerischen Wiedergabe der in der Geodäsie in so vielfältiger Form Verwendung findenden Instrumente und Meßgeräte befähigt zu sein.

Aber nicht genug an dem. Doležal sagte sich, wer Lehrer der Geodäsie werden will, muß trachten, auch genauen Einblick in den Bau der Meßmittel zu gewinnen. Daher besuchte er auf seinen Reisen alle namhaften mechanischen Werkstätten Österreichs, Deutschlands und der Schweiz, um am Werktisch und an der Drehbank die Herstellung der einzelnen Bestandteile und ihre Zusammenfügung zum gebrauchsfertigen Instrumente praktisch kennenzulernen.

Durchdrungen von einem klaren Vorstellungsbild über die Eigenschaften, die ein tüchtiger Lehrer der Geodäsie besitzen muß, als das Ergebnis unermüdlicher, gründlichster und vielseitigster wissenschaftlicher und praktischer Arbeiten der vergangenen Jahre, ging Doležal nach Wien.

Mit Verzicht auf alle materiellen Vorteile der bereits errungenen Stellung als Mittelschulprofessor, eine Stellung, um die er vielfach beneidet wurde, trat Doležal am 1. Jänner 1896 als Konstrukteur der Lehrkanzel für Prak-

tische Geometrie unter Professor Dr. Anton Scheil wieder in den Dienst der Technischen Hochschule in Wien. Als damals einzige wissenschaftliche Hilfskraft an der genannten Lehrkanzel oblag ihm die ungewöhnlich große Aufgabe, nicht nur die Hörer des geodätischen Kurses und der Bauingenieurschule, sondern auch der Hochbau- und Maschinenbauschule — insgesamt fast 800 Hörer — im geodätischen Zeichnen und in den praktischen geodätischen Übungen zu unterweisen.

Sein erstes Augenmerk widmete er der Ausgestaltung der Winterübungen im Hörsaal und der Vorübungen im Freien als notwendig erkannte Vorstufe für die große Vermessungsübung im Gelände, und er hatte die Genugtuung, daß seine Vorschläge sogleich die volle Genehmigung seines Vorgesetzten fanden.

Wie rasch es Doležal gelang, Professor Scheil von seiner hohen fachlichen Eignung zu überzeugen, beweist, daß er sofort mit Vorträgen über die Photogrammetrie und mit den einschlägigen praktischen Übungen betraut wurde.

An seinen Vorträgen und Übungen beteiligten sich zahlreiche Offiziere des Heeres und der Marine, unter andern Linienschiffsleutnant E. v. Raiss, Linienschiffsfähnrich Theodor Scheimpflug u. a. m.

Im Jahre 1891 fand in Wien der IX. Deutsche Geographentag statt. Die Photogrammetrie war bei dieser Veranstaltung durch einen Vortrag von Professor Steiner, eine reichhaltige Ausstellung von in Österreich erzeugten photogrammetrischen Instrumenten, ferner durch praktische Arbeiten des Oberingenieurs Pollack und die photogrammetrischen Arbeiten Paganini's vom italienischen Militärgeographischen Institut in Florenz vertreten.

Kurze Zeit darauf traten der damalige Direktor der Wiener Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt Professor Dr. Josef Maria Eder und Professor Dr. Anton Scheil an die „Zentralkommission für die Erhaltung von Kunst- und historischen Denkmäler“ mit Anträgen heran, nach preußischem Muster die nunmehr weit genug ausgebildete Photogrammetrie in den Dienst des Denkmalschutzes zu stellen und ein Österreichisches Denkmäl-Archiv zu schaffen. Dies hatte zur Folge, daß Doležal mit Unterstützung des Ministeriums für Kultus und Unterricht in die Meßbildanstalt nach Berlin entsendet wurde, um dort das Meydenbauer'sche Verfahren der Architekturphotogrammetrie und die Einrichtungen des Preußischen Denkmäler-Archives kennenzulernen, wozu ihm ein zweimonatlicher Aufenthalt reichlich Gelegenheit bot. Das Meydenbauer'sche Aufnahmsverfahren im Gelände lernte er anlässlich der photogrammetrischen Vermessung einer romanischen Kirche und einer Kapelle in Bacharach am Rhein kennen.

Auf Grund der dem Unterrichtsministerium vorgelegten Ergebnisse seiner Berliner Studienreise erhielt Doležal im Jahre 1898 den Auftrag, an der Pfarrkirche zu St. Leopold in Gersthof in Wien Probeaufnahmen durchzuführen. Es wurde der Grundriß der Kirche und mehrere Aufrisse planlich dargestellt, wobei Doležal nicht nach dem Vorgange Meydenbauer's, sondern nach eigenen Überlegungen vorging. Der photographische Teil der Arbeiten wurde in der Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt von Eder aus-

geführt. Da diese Probeaufnahmen das Ministerium und die bezeichnete Zentralkommission voll befriedigten, erhielt Doležal noch im selben Jahre den Auftrag, das schönste Bauwerk Wiens, die Karlskirche, photogrammetrisch festzulegen.

Getreu der Vorstellung, die er sich über die Fähigkeiten und den Umfang des Wissens eines Lehrers der Geodäsie gebildet hatte, und erfüllt von der Überzeugung, daß aus Büchern geschöpfte Gelehrsamkeit allein nicht ausreicht, um tüchtige Geometer heranzubilden, wollte er als akademischer Lehrer vor allem nur über Dinge sprechen, die er aus eigener Anschauung kannte, worüber er ein eigenes Urteil sich bilden konnte, und über Arbeiten, die er selbst vollbracht oder an denen er zumindest mitgewirkt hatte.

Zu seiner Vervollkommnung benützte er seine karg bemessene freie Zeit, die ihm seine Tätigkeit als Konstrukteur der Lehrkanzel übrig ließ, um die Einrichtungen und die Arbeiten des ehem. Militärgeographischen Institutes und des österreichischen Grundkatasters kennenzulernen.

Im Jahre 1897 nahm Doležal an den phototopographischen Feldarbeiten des Militärgeographischen Institutes teil, die unter der Leitung Frh. v. Hübl's und des Militärbeamten Pichler im Triglav- und Mangart-Gebiete ausgeführt wurden. Auch an allen übrigen Arbeiten dieses Institutes, den geodätischen, astronomischen, Mappierungs- und kartographischen Arbeiten hat Doležal sich beteiligt, unterstützt und gefördert von den Offizieren Daubelsky v. Sterneck, Hartl u. v. a. Als Letztgenannter, Oberst Heinrich Hartl, Leiter der Triangulierungsabteilung, in den Ruhestand ging, wurde Doležal vom damaligen Kommandanten des Militärgeographischen Institutes, Exzellenz Reichsritter Christian v. Steeb, im Jahre 1899 die Leitung dieser Abteilung angeboten. Doležal dankte auch für diesen ehrenvollen Antrag und blieb dem Lehrfach treu.

Im alten, schon im Jahre 1817 errichteten Triangulierungs- und Kalkulbureau des Grundsteuerkatasters trat er mit Broch in Gedankenaustausch, im Lithographischen Institut mit Rokitansky. Beim Studium des Fortführungsdienstes und der Neuvermessungen lernte er Jusa und Demmer kennen.

Zur gründlichen Vertiefung seines Wissens, namentlich auf photogrammetrischem Gebiet, trug ganz wesentlich der Umstand bei, daß Doležal's Vorgesetzter, Professor Dr. Anton Scheil, selbst ein vorzüglicher Lehrer und wissenschaftlich sehr tätiger Professor war, der sich mit besonderer Vorliebe mit der Optik und der Photogrammetrie befaßte. Hier hatte Doležal reiche Gelegenheit, bei allen Arbeiten dieses ausgezeichneten Mannes auf diesem Gebiete, von welchem nur sein Universal-Phototheodolit, sein Universal-Stereoskop, zwei photogrammetrische Stereoapparate und ein Fokometer, ausgeführt von den Feinmechanikern Starke und Bernard, erwähnt werden sollen, tätig mitzuwirken.

In das Jahr 1897 fällt auch die Teilnahme Doležal's an der 56. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Braunschweig, wo er vor einer glänzenden Zuhörerschaft, aus mathematischen und

geodätischen Kreisen, einen Vortrag hielt über die „Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung des Wolkenschattens“, der leider erst im Jahre 1918 von der Wiener Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurde.

Trotz allem fand Doležal noch Zeit, eine sehr ergiebige Tätigkeit als Fachschriftsteller und als Vortragender zu entfalten. Da er sich als Konstrukteur in Wien vornehmlich mit photogrammetrischen Studien befaßte, ist es erklärlich, daß er hauptsächlich einschlägige Themen behandelte.

Professor in Leoben.

Mit Allerhöchster Entschließung vom 19. November 1899 wurde Doležal zum o. ö. Professor für Darstellende und Praktische Geometrie an der Bergakademie in Leoben ernannt.

Um die Jahrhundertwende war es gewiß ein seltener Fall, daß ein Bewerber aus dem Stande der wissenschaftlichen Hilfskräfte einer Hochschule unmittelbar zum Ordinarius vorrückte.

Obwohl Doležal vom damaligen Rektor Ingenieur Karl Habermann an über seine Bedingungen befragt, sogar als Supplent die Lehrkanzel zu übernehmen sich bereit erklärte und damit den Beweis erbracht hatte, daß es ihm um wirtschaftliche Vorteile nicht zu tun war, wurde er vom Professorenkollegium in Würdigung seiner bisherigen wissenschaftlichen Leistungen an erster Stelle für die Professur in Vorschlag gebracht. Das Ackerbauministerium, dem damals die k. k. Bergakademie unterstand, stimmte dem Antrage im vollen Umfange zu und damit hatte Doležal, verhältnismäßig jung, im Alter von 37 Jahren das angestrebte Ziel erreicht.

Mit bewundernswertem Eifer schritt er an die Umgestaltung und den Ausbau des Unterrichtsbetriebes in seinen beiden Fächern, wobei ihm der, allerdings auf einer niederen Grundlage erprobte Lehrgang an der Mittelschule in Sarajevo größtenteils als Vorbild diente.

Das Hauptgewicht in den Vorträgen über Darstellende Geometrie wurde auf die Kotierte Projektion gelegt und erst dann die Orthogonale Projektion, die Axonometrie und die Perspektive behandelt.

Gliederung und Umfang des Stoffes bereiteten insoferne einige Schwierigkeiten, da viele Hörer als ehemalige Gymnasiasten keine Vorkenntnisse in diesem Fache besaßen und eine Aufnahmsprüfung beim Eintritt in die Akademie nicht gefordert wurde. Im konstruktiven Zeichnen wurden sowohl lehrreiche theoretische Aufgaben zur selbständigen Lösung gegeben, als auch praktische Beispiele aus der Baukunde und Maschinenlehre mit Schattenbestimmungen behandelt. In der Kotierten Projektion behandelte er auf Grundlage von Schichtenkarten alle Aufgaben des Bauingenieurs sowie Aufgaben aus der Markscheidekunde, wie Bestimmung der Lagerstätten, ihr Streichen und ihre Neigung, die Ermittlung des Ausbisses usw.

Die Auswahl der Beispiele traf Doležal grundsätzlich im Einvernehmen mit den Fachprofessoren.

In der Praktischen Geometrie gliederte er seine Vorträge stofflich und

zeitlich derart, daß im Winter neben den Übungen mit den einfachen Meßmitteln und Meßgeräten auch geodätische Rechenübungen auf Grund gestellter Programme ausgeführt werden konnten, so daß bei Beginn der Übungen im Freien die Hörer bereits über hinreichende Fachkenntnisse verfügten und genügende Vertrautheit mit den Meßmethoden und Meßmitteln besaßen. Die Meßübungen im Freien gliederte er in zwei Teile. In Vorübungen, die in der Zeit nach Ostern etwa 12 Halbtage in Anspruch nahmen und in eine große Vermessungsübung, die 14 Tage dauerte. Der Umfang dieser praktischen Übungen umschloß alle Aufgaben der Niederen Geodäsie.

Im Jahre 1902 setzten an der Bergakademie in Leoben Reformbestrebungen ein, die auf eine gründliche Erweiterung und Ausgestaltung des Studiums des Berg- und Hüttenwesens durch Einführung eines vierten Jahrganges, Einführung einer zweiten abschließenden Staatsprüfung und auf die Möglichkeit der Erwerbung des Doktorates der Montanwissenschaften abzielten.

Diesen Anlaß nahm Doležal wahr, sich in überzeugender Weise für die Notwendigkeit der Schaffung einer eigenen Lehrkanzel für Geodäsie und Markscheidekunde einzusetzen und nachzuweisen, daß die Unterrichtszweige für das Vermessungswesen über und unter Tag voneinander nicht getrennt sein sollen. Obwohl Doležal bis nun dem Gebiete des bergmännischen Vermessungswesens ferngestanden war, erklärte er sich bereit, anstatt der Lehrverpflichtung für Darstellende Geometrie jene der Markscheidekunde zu übernehmen und vertauschte damit ein Fach, dessen Ausübung sich auf den Hörsaal beschränkte, mit einem, das mit mühevollen Arbeiten und Übungen in der Grube verbunden ist.

Welche Arbeit und welche Mühe mag es Doležal gekostet haben, sich in so kurzer Zeit die Theorie und Praxis des Markscheidewesens in dem Maße anzueignen, um imstande zu sein, die bisher nicht entsprechend behandelte Markscheidekunde wissenschaftlich und hochschulmäßig zu betreiben und dieses wichtige Fachgebiet akademisch vertreten zu können!

Es ist Doležal's besonderes Verdienst, der Markscheidekunde in Österreich die ihr gebührende Stellung als bedeutungsvolles Teilgebiet der Geodäsie gegeben zu haben.

Auch sein Lieblingsarbeitsgebiet, die Photogrammetrie, wurde in Leoben nicht vergessen, sondern alljährlich in einer a. o. Vorlesung behandelt und auch für Zwecke der Darstellenden Geometrie herangezogen.

Schon im Jahre 1900 hat Doležal die photogrammetrische Standpunktbestimmung durch Rückwärtseinschneiden im Raum für Standorte im Gelände verwertet und diese Aufgabe sowohl zeichnerisch mit Hilfe der Darstellenden Geometrie, als auch rechnerisch gelöst. Der I. Teil dieser bedeutsamen Arbeit, bei der zur Standpunktbestimmung neben den Horizontalwinkeln auch Vertikalwinkel herangezogen werden, ist zum Teil im Jahre 1924 in den Veröffentlichungen der „Spanischen Akademie der Wissenschaften in Madrid“ erschienen.

Zahlreich sind die wissenschaftlichen Arbeiten, die Doležal während seiner sechsjährigen akademischen Wirksamkeit an der Bergakademie, die seit ihrer Umgestaltung den Namen „Montanistische Hochschule“ führt, ver-

öffentlicht hat. Sie behandeln verschiedene geodätische, astronomische und photogrammetrische Themen, darunter auch die Lösung des Wolkenproblems von einem Standpunkt bei Verwendung der Reflexe. In dieser Zeit schuf Doležal auch das österreichische Standardwerk der geodätischen Literatur, sein Hand- und Lehrbuch der Niederen Geodäsie, nach dem Urteile Hammer's das vollständigste Lehrbuch über Praktische Geometrie, ferner sein Buch über Nivellements und seine bekannten Logarithmentafeln, Werke, die zum Teil leider vergriffen sind.

Professor in Wien.

Am 1. Oktober 1905 wurde Doležal an die Technische Hochschule in Wien berufen. Im Alter von 43 Jahren übernahm er, erfüllt von Freude und stolzer Genugtuung, die Lehrkanzel, die einst Stampfer geleitet hatte. Und sein Schaffen und Wirken an dieser Arbeitsstätte hat bewiesen, daß das Erbe dieses großen Geodäten keinen besseren Händen hätte anvertraut werden können.

Seine erste Aufgabe erblickte er wieder in der Ausgestaltung des Geodätischen Unterrichtes, um ihn den ihm wohlbekannten Bedürfnissen der Bauingenieure und der Geometer anzupassen. Seine Pläne fanden Zustimmung und Anerkennung von seinem ehemaligen Lehrer und Vorgesetzten, Professor Dr. Anton Scheil, dem Doležal in unwandelbarer Dankbarkeit und Verehrung zugetan war.

In dem Nachruf, den er seinem ehemaligen Lehrer im II. Bande des „Internationalen Archives für Photogrammetrie“ gewidmet hat, finden sich folgende Worte über die Lehrtätigkeit dieses ausgezeichneten Mannes:

„In seinen Vorlesungen an der Technischen Hochschule behandelte er selbst die schwierigsten und verwickeltesten Kapitel seiner Disziplin mit bewunderungswürdiger Leichtigkeit und verstand es auch meisterhaft, durch die methodische Entwicklung und die fesselnde Darstellung das Interesse der Hörer stets rege zu erhalten und ihr Verständnis zu erwecken.“

Bei den Vorträgen über Instrumentenkunde, in welchen für den Lehrer die Gefahr, trocken und monoton zu werden, so nahe liegt, wo leider nur zu oft von den Stellschrauben des Unterbaues beginnend, jedes Detail mit einer allzu übertriebenen Genauigkeit beschrieben und dimensioniert wird und das unbedeutendste Korrektionsschräubchen eine minutiöse Darstellung erhält, so daß manchem Zuhörer vor dem komplizierten Apparate graut und schließlich Niemand aus dem Auditorium weiß, worin das Wesen des geschilderten Instrumentes eigentlich besteht, verstand es Professor Scheil vortrefflich, die wesentlichen Bestandteile auch des komplizierten Instrumentes aus der Fülle der nebен-sächlichen Details herauszuschälen, die Art und Weise seiner Funktionierung klipp und klar zu präzisieren und dem Hörer zu verdeutlichen.

Er gab sich nicht ab mit einer ermüdenden Aufzählung von Schrauben und Schräubchen, Libellen und Nonien, sondern baute das Instrument durch die organische Verbindung der wichtigen Punkte, Linien und Ebenen in seine Zusammensetzung und in seiner Wirksamkeit einfach und sachlich vor dem Hörer auf.

Die Übungen aus der „Praktischen Geometrie“ unter Professor A. Scheil bleiben allen Hörern, die an ihnen teilnahmen, in unvergeßlicher, angenehmer Erinnerung.

Über die drastische, stets den Nagel auf den Kopf treffende Art seiner praktischen Unterweisungen bei der Feldarbeit zirkulieren zahlreiche Anekdoten.“

Was Doležal über seinen Lehrer schrieb, diente ihm als Vorbild und trifft auch auf seine Vortragsweise zu.

Mit Feuereifer ging er ans Werk. In wahrhaft mustergültiger Weise gestaltete er den geodätischen Unterricht von Grund auf um, wobei er den Bedürfnissen, Errungenschaften und Fortschritten unseres technischen Zeitalters in vollem Ausmaße Rechnung trug. In den Unterricht wurden geodätische Rechenübungen eingeschaltet und das seit Stampfer und Herr übliche Situations- und Terrainzeichnen wurde durch Kartierungsübungen ersetzt. Die praktischen Übungen wurden in Winterübungen, Vorübungen im Freien und eine große Vermessungsübung im Gelände gegliedert und alle Übungen dem Fortschreiten des theoretischen Unterrichtes angepaßt.

Die Arbeiten mit dem Meßtisch wurden eingeschränkt und dafür die numerischen Aufnahmehmethoden mit Theodolit und Tachymeter einschließlich der Absteckungsarbeiten erheblich erweitert.

Das größte Gewicht legte Doležal auf die gewissenhafte Teilnahme der Studierenden bei den praktischen Übungen, er konnte bei der Erteilung der Besuchsbestätigung sehr hart sein.

Er selbst war bei den Vermessungsübungen stets als erster und letzter zur Stelle; in bester Erinnerung werden noch vielen seiner ehemaligen Hörer die Rapporte sein, die bei den großen Vermessungsübungen gruppenweise nach Abschluß der Tagesarbeit abgehalten wurden und oft bis spät in die Nacht währten, aber sich durch die an den Übungsarbeiten geübte sachliche Kritik sehr lehrreich gestalteten.

Feststehend ist die Tatsache, daß die Studierenden der Geodäsie in Leoben und in Wien sich stets mit großer Anteilnahme und Freude den praktischen Vermessungsübungen unterzogen, und zwar in der richtigen Erkenntnis, daß die technische Praxis vom Ingenieur die Beherrschung der grundlegenden Aufgaben des Vermessungswesens unbedingt verlangt, und daß deshalb — wohl ein Einzelfall im technischen Hochschulstudium — die Hörer in Theorie und Praxis des Vermessungswesens gleich gut ausgebildet werden müssen.

Doležal leitete die großen Vermessungsübungen mit großer Liebe; die erzielten Leistungen bereiteten ihm Freude und Befriedigung und er empfand sie als den höchsten und schönsten Lohn für die mühevolle Arbeit seines akademischen Wirkens.

Besondere Aufmerksamkeit widmete Doležal der Ausbildung der Geometer, für die er die soeben kurz angedeutete Neugestaltung des Unterrichtes nicht ausreichend fand. Im Jahre 1912 schuf er die Lehrkanzel für „Technik des Katasterwesens und Geodätisches Zeichnen“ und auf seine Anregung wurden auch Vorlesungen über „Technische Terrainlehre“ gehalten.

Die oberste Katasterbehörde, die Generaldirektion des Grundsteuerkatasters, brachte den Bestrebungen Doležal's volles Verständnis entgegen und verlieh ihm Ausdruck durch die Zuteilung eines der Praxis entnommenen jungen und fähigen Geometers als Assistent an seine Lehrkanzel.

Die Photogrammetrie wurde anfangs nur im Wintersemester mit zwei Wochenstunden gelesen, im Sommersemester schlossen sich praktische Feldübungen an. Einige Jahre später wurde die Lehrtätigkeit auf zwei Wochenstunden in beiden Semestern bei entsprechender Erweiterung der Übungen erhöht und überdies Sondervorlesungen über Architektur-Photogrammetrie und Photogrammetrie für militärische Zwecke samt Übungen gehalten.

Doležal's nie erlahmende Tatkraft und seine reichen Erfahrungen auf dem Gebiete des Unterrichtswesens bewirkten, daß er schon im Jahre 1907 für zwei Jahre zum Dekan der Bauingenieurschule gewählt und ein Jahr darauf durch das so rasch errungene Vertrauen des Professorenkollegiums als Rektor magnificus zur Leitung der Hochschule berufen wurde.

Seine Inaugurationsrede behandelte die Photogrammetrie: „Über die Bedeutung der photogrammetrischen Meßkunst.“

Entsprechend seiner hohen Auffassung vom akademischen Lehramte war Doležal unablässig bestrebt, durch rastlose wissenschaftliche Arbeit, durch Vorträge in Fachkörperschaften und durch eine rege publizistische Betätigung neben seiner mustergültigen Lehrtätigkeit an der Hochschule die Geodäsie in jeder Hinsicht zu fördern, die Verbindung mit der Fachwelt lebendig zu erhalten und zu vertiefen und breite Kreise der Öffentlichkeit mit ihrer Bedeutung für das wissenschaftliche Leben bekanntmachen. Namentlich war es wieder die Photogrammetrie, an deren wissenschaftlicher Weiterentwicklung er arbeitete und für deren Anwendung und Verbreitung in der Praxis er sich lebhaft einsetzte. Diesem Zwecke dienten u. a. drei großangelegte Vorträge, die er noch als Rektor hielt. „Über Ballonphotogrammetrie“ im Ingenieur- und Architektenverein in Wien; „Photogrammetrie in der Architektur- und Denkmalflege“ auf dem VIII. Internationalen Kongreß für Architektur in Wien 1909 und „Über die Bedeutung der Photogrammetrie“ auf dem Internationalen Kongreß für angewandte Photographie in Dresden 1909, bei welcher Veranstaltung Doležal auch als Preisrichter bei der „Photographischen Ausstellung“ mitwirkte.

Den Bemühungen Doležal's, der Photogrammetrie zur verdienten Geltung zu verhelfen, war bald ein reicher Erfolg beschieden. Zur Zeit seiner Berufung nach Wien hatte Frh. v. Hübl seine ersten stereophotogrammetrischen Versuche abgeschlossen und damit den Beweis erbracht für die hervorragende Leistungsfähigkeit der Stereophotogrammetrie für die Zwecke der topographischen Landesaufnahme. Hauptmann S. Trück bewies durch eine Reihe größerer Arbeiten die Brauchbarkeit dieses jüngsten Aufnahmeverfahrens für die Zwecke des Bauingenieurs. Die Professoren Schell und Eder ließen nicht ab, ihre Bemühungen zur Schaffung eines Archives für Baudenkmäler in Österreich fortzusetzen. Durch eine Reihe von Vorträgen (Trück in der

k. k. Geographischen Gesellschaft, Doležal in der „Kunsthistorischen Gesellschaft“ und in der „Bauhütte“ u. a. m.) wurde der Kreis derer immer größer, die die Bedeutung der Photogrammetrie erkannten. Und so geschah es an einem Abend, der nach einem Vortrage der Geselligkeit gewidmet war, daß die Anregung fiel, eine Photogrammetrische Gesellschaft in Wien zu bilden, der Doležal sogleich die Tat folgen ließ.

Am 7. Mai 1907 erstand in Wien die erste Vereinigung der Welt zur Förderung und Vertretung dieses Wissensgebietes: „Die Österreichische Gesellschaft für Photogrammetrie“, der bereits im Jahre 1910 die Bildung der „Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie“ folgte, die heute in fast allen Kulturländern Zweiggesellschaften aufweist. Die Zeitschrift der Gesellschaft, das „Archiv für Photogrammetrie“, hat Doležal gegründet und zwei Jahrzehnte lang muster-gültig geleitet. Österreich wurde geradezu zur Hauptpflegestätte der Photogrammetrie, was aus Anlaß der Abhaltung des „Ersten Internationalen Kongresses für Photogrammetrie“ im Jahre 1913 in Wien, in Verbindung mit einer Hauptversammlung der Gesellschaft in überzeugender Weise zum Ausdruck kam.

Diese Veranstaltung nahm einen überaus glänzenden Verlauf und bewies vor allem, welches Ansehen und welche Wertschätzung Doležal bei der internationalen Fachwelt bereits genoß.

Die Brauchbarkeit der Aërophotogrammetrie, besonders für topographische Aufnahmen, hat Doležal als einer der ersten in ihrer vollen Bedeutung erkannt.

Schon in seiner feierlichen Antrittsrede als Rektor hat er darauf in überzeugender Weise hingewiesen und in noch höherem Maße auf dem Kongreß für wissenschaftliche Photographie in Dresden. Bei diesem Anlasse wurde dem Österreicher Hauptmann Theodor Scheimpflug auf Antrag Doležal's die höchste Auszeichnung zuerkannt, die das Preisgericht der Ausstellung zu vergeben hatte.

Leider blieb Doležal gerade auf seinem bevorzugten Arbeitsgebiet eine Enttäuschung nicht erspart. Noch heute erfüllt es ihn mit Bedauern, daß man nach dem unerwartet frühen Tode Scheimpflug's im Jahre 1911 seinen Ratschlägen, die aërophotogrammetrischen Arbeiten des Verblichenen streng wissenschaftlich zu prüfen und sinngemäß fortzusetzen, nicht die gebührende Beachtung schenkte.

Vielleicht hätte dann Österreich die führende Rolle beibehalten, die es jahrelang innehatte!

Nicht unerwähnt darf Doležal's Betätigung auf dem Gebiete des Instrumentenbaues bleiben. Leider sind nicht alle seine Ideen verwirklicht worden. Zu seinen photogrammetrischen Studien in Bosnien verwendete er eine nach seinen Angaben für photogrammetrische Zwecke umgebaute Goldmann-Kamera 18×24 cm.

Im Jahre 1895 entwarf er einen Phototeodolit mit horizontaler Bildebene, mit Glasprisma vor dem Objektiv und einem Orientierungs-

fernrohr. Diesen Phototheodolit wollte der Berliner Mechaniker Ney ausführen, leider konnte der verlangte geringe Geldbetrag nicht aufgebracht werden.

Der Mechaniker Bernارد des Physikalischen Institutes der Technischen Hochschule in Wien baute nach seinen Angaben ein einfaches Koordinatenmeter zur Ausmessung der Bildkoordinaten auf Photogrammen.

Das Math.-mech. Institut Rud. u. Aug. Rost hat im Jahre 1909 einen Photo-Transformator nach Scheil-Doležal und im Jahre 1910 nach Doležal's Angaben einen Photo-Tachymeter mit Hilfsinstrumenten für stereophotogrammetrische Aufnahmen gebaut, die sich vollkommen bewährt haben.

Von derselben Werkstatt wurde das Grubennivellier-Instrument von Cseti nach Abänderungsvorschlägen von Doležal gebaut.

Auch für den Bau rein geodätischer Instrumente stammen von Doležal mehrere Anregungen. Im Jahre 1898 veröffentlichte er in der Zeitschrift „Der Mechaniker“ die Konstruktion eines neuen optischen Distanzmessers mit einem Teleobjektiv und der Mechaniker für Präzisions-Instrumente Eduard Ponocny in Wien hat nach Doležal's Unterlagen Instrumentenausrüstungen für topographische Zwecke geliefert.

In Anbetracht der umfassenden Beherrschung seines Fachgebietes und seiner vielseitigen Erfahrungen in Verwaltungs- und Studienangelegenheiten erscheint es wohl selbstverständlich, daß Doležal in allen Fragen des technischen Unterrichtes und des Vermessungswesens im besonderen zu Rate gezogen wurde.

Jahre 1911 wurde er vom Minister Grafen Stürgkh in außerordentlicher Verwendung in das k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht einberufen und bekleidete in dieser ehrenden Vertrauensstellung das Amt eines Beirates für technische Studienangelegenheiten, wobei er das Vergnügen hatte, mit dem ausgezeichneten Referenten für Technische Hochschulen, Dr. techn. h. c. R. Hörtigen, einem genauen Kenner und Schätzer der Technikerschaft, für eine günstige Entwicklung des technischen Studienwesens bis zum Jahre 1919 wirken zu können.

Im Jahre 1912 wurde Doležal als Konsulent in die Generaldirektion des Grundsteuerkatasters berufen, wo er Gelegenheit fand, sich mit allen einschlägigen technischen Fragen des Katasters zu beschäftigen. Dieser Behörde stand damals der Sektionschef Dr. Vladimir Globocnik Edler von Sorodolski als Generaldirektor vor. Wenn Doležal gelegentlich betonte, daß die Zusammenarbeit mit den Beamten der Generaldirektion und ganz besonders mit ihrem Leiter zu seinen schönsten Erinnerungen zählt, so spricht er allen Geometern aus dem Herzen, die das Glück hatten, unter der Führung dieses edlen Menschen zu arbeiten, der von allen seinen ehemaligen Untergebenen als wahrhaft gütiger und väterlicher Freund in treuer Anhänglichkeit verehrt wird.

Mit seiner umfangreichen Lehrtätigkeit, seinem Hervortreten mit wissenschaftlichen Arbeiten, seiner Beteiligung an den Beratungen wichtiger Ausschüsse an der Hochschule, Berichterstattung im Professorenkollegium und

Erfüllung der Aufgaben als Beirat im Unterrichtsministerium und bei der Katasterbehörde war die Tätigkeit Doležal's noch lange nicht erschöpft.

Im Jahre 1921 habilitierte er sich an der Wiener Universität als Privatdozent für „Geodäsie und Photogrammetrie“, welche Dozentur er im Jahre 1927 zurücklegte. Entsprechend seiner Auffassung von den Aufgaben eines Geographen, daß gründliche Kenntnisse über Kartenentwurfslehre, Geländekunde u. dgl. m. noch nicht den tüchtigen Geographen ausmachen, sondern daß jeder Geograph auch die Fähigkeiten besitzen muß, zur Herstellung einer geodätisch einwandfreien Skizze oder eines maßhältigen Planes, war Doležal bemüht, seine Hörer mit den Elementen der Geodäsie und mit der Handhabung einfacher Meßinstrumente und Meßmittel vertraut zu machen, um später imstande zu sein, eine kleine Triangulierung, ein Nivellement oder eine kleine Geländeaufnahme mit dem Meßtisch oder dem Theodoliten selbständig durchführen zu können. Die gleichen Ansichten teilte er bezüglich der Ausbildung von Geologen, Archäologen usw.

An der Hochschule war er Vorsitzender der Staatsprüfungskommission des damaligen Kurses zur Heranbildung von Geometern, Mitglied und Vorsitzender der Staatsprüfungskommissionen für das Bauingenieurfach und seit 1926 für das Vermessungswesen sowie der staatlichen Prüfungskommission für behördlich autorisierte Zivilgeometer. Außerhalb der Hochschule war Doležal Mitglied und Präsident der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Mitglied der Normal-Eichungskommission, des Patentamtes, des Sachverständigen Beirates für den Bereich der Photographie, Mitglied des Luftfahrausschusses und schließlich Beirat für das Vermessungswesen und der Versuchsanstalt für geodätische Instrumente.

Damit nicht genug, widmete Doležal seine Arbeitskraft auch vielen Vereinen, darunter: dem Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Verein, der k. k. Geographischen, Meteorologischen und Photographischen Gesellschaft, dem Flugtechnischen Verein und noch vielen anderen Körperschaften.

Am 24. März 1907 wurde Doležal zum Obmann des Vereines der Österreichischen k. k. Vermessungsbeamten gewählt. Im gleichen Jahre übernahm er die Schriftleitung des wissenschaftlichen Teiles der im Jahre 1903 gegründeten „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“ und gab ihr jene Form, Ausstattung und stoffliche Gliederung, die sich sehr bewährt und bis heute unverändert erhalten hat. Unter seiner Führung erwarb sich die Zeitschrift der Österreichischen Geometerschaft den Ruf eines ernsten und gediegenen Fachblattes, den es sich auch unter den schwierigen Verhältnissen der Nachkriegszeit erhalten konnte. Er war es auch, der im selben Jahre durch die Einführung regelmäßiger Vorträge, im Rahmen der Monatsversammlungen, das Vereinsleben lebendiger und ergiebiger gestaltete, darauf bedacht, weitere Kreise der Technikerschaft mit allen Neuerungen und Fortschritten auf dem Fachgebiete der Geodäsie bekanntzumachen. Im Verein mit Regierungsrat A. Tichy gründete er im Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Verein die Fachgruppe für das Vermessungswesen. Doležal hat damit dem Geo-

meterstand einen großen Dienst erwiesen und ganz besonders zur Hebung seines Ansehens beigetragen.

In der Nachkriegszeit gelang es ihm, die Vereinigungen der Geometer, Photogrammeter und Kartographen zu einer Arbeitsgemeinschaft zusammenzuschließen und damit dem Vortagswesen eine breitere Grundlage zu geben.

Nach einem vieljährigen Kampfe, an dessen Spitze immer Doležal zu finden war, erschien die Kais. Verordnung vom 14. März 1917, derzufolge auch die Geometer Österreichs unter bestimmten Voraussetzungen die Standesbezeichnung „Ingenieur“ führen durften. Damit war wohl ein altes Unrecht beseitigt, aber die Gleichberechtigung und Gleichwertung mit den in anderen technischen Zweigen tätigen „Ingenieuren“ noch nicht erreicht. Schon im Jahre 1906 hatte Doležal erkannt, daß die volle Gleichstellung nur durch die Ausgestaltung der technischen Studien der Geometer erreicht werden könne, die bisher nur aus einem zweijährigen Geodätischen Kurse mit einer abschließenden Staatsprüfung bestand. Solche Kurse gab es an jeder der sieben Technischen Hochschulen der alten Monarchie. Sie wurden im Jahre 1896 als Notbehelf errichtet, in einer Zeit, wo die österreichische Katasterverwaltung aus Anlaß der Revision des Grundsteuerkatasters eine große Anzahl vermessungstechnisch vorgebildete Beamte dringend brauchte und sich daher mit einem zweijährigen Hochschulstudium zufrieden gab.

Je weiter die Zeit fortschritt, desto mehr wurde die Unzulänglichkeit des Geodätischen Kurses fühlbar. Die Entwicklung der geodätischen Wissenschaften in den letzten Jahrzehnten und namentlich die bedeutenden Fortschritte, die im Vermessungswesen mit Hilfe des Lichtbildes erzielt wurden, stellten die Lehrer allmählich vor die unlösbare Aufgabe, die Fülle des Stoffes in einen zweijährigen Lehrgang einzuzwängen und den Hörern, an die der Geodätische Kurs vom Anbeginn Anforderungen stellte, wie sie keine andere Fachschule einer Technischen Hochschule zu verzeichnen hatte, wurde es schließlich wegen des von Jahr zu Jahr steigenden Umfanges des Lehrstoffes unmöglich gemacht, ihr Studium nach zwei Jahren zu vollenden. Um diese unhaltbaren Zustände zu beseitigen, waren Doležal's Bestrebungen vom Anbeginn seiner Lehrtätigkeit in Wien auf die Erweiterung und den Ausbau des geodätischen Studiums zu einer vierjährigen Fachschule gerichtet.

Wie groß die Widerstände waren, die Techniker anderer Fachgebiete, aus kleinlichem Eigennutz und in völliger Verkennung der Bedeutung des Vermessungswesens für alle Zweige der Staatsverwaltung und der Volkswirtschaft, Doležal und seinen Mitarbeitern entgegensezten, erhellt wohl am besten daraus, daß es zur Erreichung des Ziels eines fast zwanzigjährigen Kampfes bedurfte, der schließlich mit einem Vergleich endigte und eine dreijährige Fachschule brachte.

Trotzdem war der 6. September 1924 ein Freudentag für die kampfgewohnte Geometerschaft Österreichs und ihren Führer, der in seinem Leben niemals Kampfesmüdigkeit kannte, niemals den Mut verlor und niemals die

Hoffnung sinken ließ. Vorzüge, die eine Ursache der großen Erfolge Doležal's darstellen.

Durch die Einführung zweier Staatsprüfungen, und zwar einer ersten — allgemeinen — und einer zweiten — fachlichen —, ferner durch die Zuerkennung der Standesbezeichnung „Ingenieur“ auf Grund der Kais. Verordnung vom Jahre 1917 nach Ablegung der zweiten Staatsprüfung und endlich durch die Gewährung des Promotionsrechtes brachte die „Unterabteilung für Vermessungswesen“ der Fakultät für Angewandte Mathematik und Physik, dem geodätischen Studium die Zuerkennung der Gleichwertigkeit mit den anderen Fakultäten der Hochschule.

Mit dem Patente vom 23. Dezember 1817 wurde der österreichische Grundkataster geschaffen. Der Schöpfer dieses großen technischen Werkes, Kaiser Franz I., ließ sich von der edlen Absicht leiten, durch die Vermessung aller Grundstücke seines weiten Reiches und die Einschätzung ihres Ertrages eine sichere Grundlage für eine gerechte Besteuerung von Grund und Boden zu schaffen. Die Gebundenheit der Katastralvermessung mit der Grundsteuer mag die Ursache sein, daß in vielen Ländern der Hauptzweig des staatlichen Vermessungswesens den Finanzverwaltungen angegliedert wurde. Mit dem Fortschreiten der Entwicklung der Technik stellte sich allmählich auch bei anderen Zweigen der staatlichen Verwaltung (Eisenbahnen, Wasserstraßen, Land- und Forstwirtschaft) die Notwendigkeit der Ausführung von Vermessungen größerem Umfanges ein. Dieses Bedürfnis führte im Laufe der Zeit in fast allen großen Verwaltungen zur Errichtung eigener Vermessungsstellen. Gleichzeitig entwickelte sich auf ganz selbständiger Linie das umfangreiche militärische Vermessungswesen.

Bei dieser Sachlage ist es verständlich, daß in den führenden Kreisen des Vermessungswesens die Forderung immer lauter und überzeugender erhoben wurde, das staatliche Vermessungswesen zusammenzufassen, ihm im Verbande der Staatsverwaltung eine selbständige Stellung einzuräumen, damit die Nachteile der Doppel- und Mehrgeleisigkeit in der Verwaltung auszuschalten, überflüssigen Zeit- und Kostenaufwand zu ersparen und endlich zu verhindern, daß das Vermessungswesen im Laufe der Zeiten eine einseitige, nur den jeweiligen Sonderzwecken eines Verwaltungszweiges dienende Entwicklung nehme.

Die schädlichen Folgen der Zersplitterung des Vermessungswesens hatte Doležal frühzeitig erkannt.

Die erste Gelegenheit, für die Vereinheitlichung des staatlichen Vermessungswesens einzutreten, bot sich ihm im Jahre 1907, als Kaiser Franz Josef I. mit Handschreiben vom 3. November d. J., dem allgemeinen Wunsche aller Techniker Österreichs Rechnung tragend, die Errichtung eines technischen Ministeriums in Aussicht stellte.

Als Obmann des Geometervereines nahm Doležal in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen streng sachlich Stellung zur geplanten Schaffung der neuen technischen Zentralstelle und forderte mit Recht und in überzeugendster Weise, daß das Vermessungswesen, als die Grundlage für alle

technischen Arbeiten, in erster Linie dem Wirkungskreise des neuen Ministeriums in vereinheitlichter Gliederung einverleibt werden müsse.

Der Inhalt dieses Aufsatzes wurde zu einer Denkschrift umgearbeitet und von Doležal dem damaligen Minister Dr. Geßmann überreicht.

Leider waren die Bemühungen Doležal's nicht vom erwünschten Erfolg begleitet.

Als mit allerhöchster Entschließung vom 21. März 1908 das „Ministerium für öffentliche Arbeiten“ ins Leben trat, zeigte sich, daß nur ein Teil der staatlichen technischen Agenden in seinen Wirkungskreis einbezogen wurde und daß auch der größte technische Zweig, das staatliche Vermessungswesen, außer Betracht geblieben war. Die neue technische Zentralstelle, von der sich die Techniker die Anerkennung der Bedeutung ihrer Leistungen erhofften, brachte in mehrfacher Hinsicht eine Enttäuschung.

Durch seine Tätigkeit als Konsulent der Generaldirektion des Grundsteuerkatasters hatte Doležal einen tiefgehenden Einblick in die Hemmungen erlangt, unter denen das zivilstaatliche Vermessungswesen zu leiden hatte. Diese Erfahrungen und die gründliche Kenntnis der Arbeiten und Aufgaben des Militärgeographischen Institutes bestärkten Doležal's Überzeugung immer mehr, daß der Staatsverwaltung vor allem eine gründliche Reform des gesamten Vermessungswesens notte. Dann kam der Weltkrieg, der mit voller Klarheit die vielseitige Bedeutung des Vermessungswesens und die Notwendigkeit seiner Vereinheitlichung aufzeigte.

Noch während des Krieges gelang es Doležal, einflußreiche Fachleute und Körperschaften für das Reformwerk zu gewinnen. Seinem Einfluß ist es zu danken, daß die ständige Delegation des österreichischen Ingenieur- und Architektentages, vertreten durch weiland Dr. Ritter v. Berger und Prof. Dr. Franz Lorbeer, sich schon im Jahre 1916 in einer an den Arbeitsminister gerichteten Denkschrift für die Zusammenfassung aller Zweige des staatlichen Vermessungswesens in ein Amt einzusetzen, und daß fast gleichzeitig der Kommandant des K. u. k. Militärgeographischen Institutes, weiland Feldzeugmeister Otto v. Frank in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen in überzeugender Weise die Notwendigkeit der Vereinheitlichung des staatlichen Vermessungswesens auf Grund der Kriegserfahrungen forderte.

Diese hochbedeutsamen Kundgebungen, von zwei voneinander unabhängigen Stellen, frei von persönlichen Bestrebungen, nur auf das Wohl des Staates und der Allgemeinheit bedacht, konnten kaum unbeachtet bleiben.

Im Jahre 1917 traten General Karl Korzer, Senatsrat Ing. S. Weilisch vom Bauamt der Stadt Wien und weiland Hofrat Schwarz der Generaldirektion des Grundsteuerkatasters durch Veröffentlichungen in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen Doležal unterstützend zur Seite.

Dann kam der unglückliche Ausgang des großen Krieges, der den Zusammenbruch der alten Donaumonarchie brachte.

In der allgemein notwendig gewordenen Umgestaltung der Verwaltung

erblickte Doležal die günstigste Gelegenheit, seinem Ziele näher zu kommen. Ohne Zögern stellte er sogleich seine ganze Kraft in den Dienst der großen Sache.

Aus Vertretern des Geometervereines, der Hochschulen, des Militärgeographischen Institutes und aller übrigen am Vermessungswesen beteiligten Kreise bildete er einen Ausschuß und verfaßte drei umfangreiche Denkschriften, worin die Notwendigkeit der Zusammenlegung, insbesonders des zivilstaatlichen und militärischen Vermessungswesens, in erschöpfender und überzeugender Weise begründet wurde.

Diese Denkschriften und ein Gesetzentwurf über die Schaffung eines Bundesvermessungsamtes und seine Organisation wurden der Regierung im Laufe der Jahre 1918 und 1919 in Abständen von aus Mitgliedern des genannten Ausschusses gebildeten Abordnungen, stets unter der Führung Doležal's, überreicht.

Seinen Bemühungen war voller Erfolg beschieden. Am 1. August 1919 erschien die Vollzugsanweisung der Staatsregierung vom 6. Juli 1919, die die Regelung des gesamten zivilstaatlichen Vermessungswesens zum Inhalt hatte. Am 28. Juli 1920 faßte der Kabinettsrat den Beschuß, das Militärgeographische Institut in die Vereinheitlichung einzubeziehen, und die Verordnung des Bundesministeriums für Handel und Verkehr vom 12. Jänner 1921 brachte das Statut des neugeschaffenen Bundesvermessungsamtes, damit den Vermessungstechnikern Österreichs die Erreichung des heiß erstrebten Ziels und Doležal einen glanzvollen Sieg nach einem mit beispieloser Beharrlichkeit, stets nur mit sachlichen Beweismitteln geführten Kampfe.

Das neu errichtete Bundesvermessungsamt kann mit vollem Recht als das erste Beispiel einer tiefeingreifenden und glücklichen Reform der Verwaltung bezeichnet werden.

Die Schaffung des Bundesvermessungsamtes und der Fachschule für Vermessungswesen an den Technischen Hochschulen sind Marksteine in der Entwicklung des Vermessungswesens in Österreich. Mit diesen, auch für das Ausland beispielgebenden Schöpfungen ist Doležal's Name untrennbar verknüpft.

Trotz seiner aufreibenden und umfassenden Betätigung in Wien an der Hochschule und im Dienste der Öffentlichkeit fand Doležal noch Zeit, seiner ersten Wirkungsstätte als Hochschullehrer zu gedenken. Schon in Leoben trug er sich mit der Absicht, eine eigene Fachschule für Markscheidewesen zu errichten, um dadurch die von ihm als Lehrer der Markscheidekunde eingeleitete Ausgestaltung des Vortragsstoffes über die Vermessungen und Übungen unter Tage erheblich erweitern, die Grubenpläne und Karten einheitlicher gestalten und auf eine höhere Stufe bringen zu können. Die Berufung nach Wien bedeutete kein Aufgeben seines Planes. Die Vorträge, die Doležal in den Jahren 1916 bis 1920 in der Fachgruppe der Berg- und Hütteningenieure des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines über die Ausbildung der Markscheider an den verschiedenen Anstalten Deutschlands gehalten hat, begegneten der größten Anteilnahme bei der Bergbehörde und bei den führen-

den Montanisten Österreichs. Die in seinem letzten Vortrage wohl begründete Anregung, die Markscheider in einer besonderen Abteilung der Montanistischen Hochschule in Leoben heranbilden zu lassen, fanden allseits lebhafte Zustimmung.

So ist Doležal nicht nur der Anreger, sondern auch der Wegbereiter für die seinem Nachfolger Prof. Dr. Franz Aubele im Jahre 1922 gelungene Errichtung einer Fachschule für Markscheider gewesen.

Wenn versucht wurde, von Doležal ein Bild zu entwerfen, als Lehrer, Forscher und Organisator, so darf zu seiner Vervollständigung eine Seite seines Wesens nicht unerwähnt bleiben, sein warmes und tiefes Empfinden für die Not und das Leid seiner Mitmenschen.

Wohl in Erinnerung an seine eigene Armut als Student und stets erfüllt von Dankbarkeit für selbst empfangene Wohltaten, hielt Doležal es stets für seine Pflicht, sich der darbenden akademischen Jugend anzunehmen.

Schon als Professor in Leoben stellte er seine Kraft in den Dienst der Studentenfürsorge und in noch viel höherem Maße war er in Wien an allen Fürsorgemaßnahmen beteiligt.

24 Jahre lang, bis zur Zurücklegung seines Lehramtes, leitete er als getreuer Anwalt der Studentenschaft erfolg- und segensreich die Geschicke des Unterstützungsvereines an der Technischen Hochschule in Wien.

Das Professorenkollegium braute ihn mit der Vertretung in der Lucam-Stiftung, im Verein der Studentenkonvekte und im Studenten-Krankenverein an der Wiener Universität sowie im Kuratorium des Rudolfinums, des einzigen, von A. Pollak v. Rudin gestifteten Studentenheimes für Techniker in Wien.

Nach dem Weltkrieg, als die Not aufs höchste gestiegen war, bemühte er sich um die Errichtung eines neuen, großen Studentenheimes. Mit Hilfe des Techniker-Unterstützungsvereines leitete er eine Sammlung ein, die 300.000 Kronen (Goldkronen) hereinbrachte; auf Grund seiner Bemühungen widmete der damalige Bürgermeister der Stadt Wien, Dr. Weißkirchner, einen Baugrund und veranlaßte das Stadtbauamt zur Verfassung der Pläne für das neue Heim, in dem 300 Techniker Aufnahme finden sollten. Alles war zum Baubeginn vorbereitet, selbst die Zustimmung des jungen Kaisers war schon herabgelangt, dem Haus den Namen „Kaiser Karl Techniker-Studentenheim“ geben zu dürfen, als der Zusammenbruch kam und mit ihm die Geldentwertung, die alle Hoffnungen und Erfolge mühevoller Arbeiten mit einem Schlag zu nichte machten.

Doležal ließ den Mut nicht sinken. Es gelang ihm, die Zuweisung von Räumen im Gebäude der ehemaligen Konsularakademie im Theresianum — unweit der Technischen Hochschule — durchzusetzen und dort ein Heim für 90 Studenten zu errichten, wodurch der größten Not gesteuert wurde.

Von seinem treuen Freunde Prof. H. Daub unterstützt, glückte es, in der Zeit der größten wirtschaftlichen Not Quellen zu erschließen, wodurch der Studentenschaft namhafte Hilfe gebracht wurde.

Doležal's selbstloses Wirken als Führer in fast allen Wohlfahrts-einrichtungen der Hochschule, seine völlige Verbundenheit mit der studierenden

Jugend, deren Wohltäter, Berater und väterlicher Freund er immer war und geblieben ist, verhalf ihm frühzeitig zu dem wohlverdienten Ehrentitel: Vater der armen Studenten. Wie viele mögen es sein, denen er in größter Not wirtschaftliche Hilfe brachte, wie viele mag er durch väterliche Einflußnahme vor dem Verbummeln geschützt und auf den richtigen Pfad zurückgebracht haben!

Doležal's Leben ist eine Kette ununterbrochener Arbeit; Ferien, Erholung kannte er nicht; höchsten Lohn und volle Befriedigung sah er nur in den Erfolgen der Arbeit.

In den schweren Zeiten nach dem Umsturze und der nachfolgenden größten wirtschaftlichen Nöte Österreichs vermochten auch die verlockendsten Anbote ausländischer Berufungen nicht, Doležal zum Verlassen von Wien zu bewegen. Er wollte in Wien bleiben, das zu seiner zweiten Heimat geworden war, wollte an der Schule wirken, der er seine Ausbildung verdankt, und wollte sie in Zeiten der Not nicht verlassen.

Schon vor dem Kriege hätte Doležal in einträglichere Stellungen gelangen können; er tat es nicht, er blieb Lehrer und nützte nie solche Gelegenheiten aus, um für sich Vorteile zu gewinnen.

Die Zusammenstellung der Publikationen Doležals zeigt, daß er sich in verschiedenen Gebieten betätigte. Von der Mathematik ausgehend, arbeitete er in der Angewandten Mathematik: Geodäsie, Markscheidekunde und Photogrammetrie. In den Sitzungsberichten der Akademie zu Wien, Agram und Madrid, in deutschen mathematischen Zeitschriften, in fachtechnischen Journalen: Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines, Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst, Österreichische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, Jahrbuch der Montanistischen Hochschulen zu Leoben und Příbram, Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen, Photographische Korrespondenz, Eder's Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik, Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie usw. finden sich Abhandlungen aus seiner Feder.

Und wer kennt nicht die vielen wissenschaftlichen Aufsätze und Abhandlungen in den von ihm als Schriftleiter geführten zwei Zeitschriften: Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Internationales Archiv für Photogrammetrie?

Niemals war sein Streben nach Anerkennung gerichtet. Aber wie wäre es denkbar, daß die großen Leistungen dieses Menschen hätten unbeachtet und unbelohnt bleiben könnten?

Er ist daher für sein Wirken als Lehrer, als Wissenschaftler und im öffentlichen Leben vielfach ausgezeichnet worden.

Kaiser Franz Josef I. verlieh ihm im Jahre 1908, zur Zeit seines Rektorates den Orden der Eisernen Krone III. Klasse, wobei er erfuhr, daß ihm diese hohe Auszeichnung auch in Anerkennung seiner sechsjährigen Tätigkeit an der Montanistischen Hochschule verliehen wurde.

Im Jahre 1911 erhielt Doležal den Titel eines Hofrates, eine Auszeichnung, die nur wenigen Hochschullehrern im Alter von 49 Jahren zuteil geworden ist.

Im Jahre 1917 wurde ihm vom Kaiser Karl für seine Wirksamkeit als Beirat im Ministerium für Kultus und Unterricht das Komturkreuz des Franz-Josef-Ordens verliehen.

Besondere Freude und Genugtuung bereiteten Doležal die ihm zuteil gewordenen akademischen Ehrungen.

Die Technische Hochschule in Aachen ehrte ihn im Jahre 1920 durch die Ernennung zum Dr. Ing. e. h. „in Anerkennung hervorragender wissenschaftlicher Leistungen fast auf allen Gebieten des Vermessungswesens“; die Technische Hochschule in Brünn anerkannte seine Leistungen im Jahre 1926 durch die Ernennung zum Dr. techn. h. c. „in Würdigung besonderer Verdienste als Forscher und Lehrer in Geodäsie und Photogrammetrie“ und die Montanistische Hochschule in Leoben würdigte seine Verdienste durch die Ernennung zum Dr. mont. h. c. im Jahre 1928 „in Anerkennung der hervorragenden Verdienste auf dem Gebiete der Geodäsie und Markscheidekunde“.

Die Kaiserliche Leopoldinische Akademie der Naturforscher in Halle a. d. Saale ernannte Doležal im Jahre 1917 zu ihrem Mitglied; der Deutsche Verein für Vermessungswesen, die Österreichische und die Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie, der Österreichische Verein für Vermessungswesen, der Galizische Geometerverein, Techniker-Cercle, ferner die studentischen Körperschaften: Deutsche Lesehalle, der Akademische Bauingenieurverein, der Akademische Architektenverein, der Techniker-Unterstützungsverein an der Technischen Hochschule in Wien zeichneten ihn durch die Ernennung zum Ehrenmitgliede aus und die Freie technisch-akademische Burschenschaft „Eisen“ ernannte ihn zum Ehrenburschen.

Als Begründer der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie und für seine 24jährige Tätigkeit als Vorstand des Techniker-Unterstützungsvereines wurde Doležal die Würde eines Ehrenpräsidenten verliehen.

Für seine Arbeiten auf dem Gebiete der Architektur-Potogrammetrie wurde ihm vom großen Deutschen Photographen-Verein die „Silberne Medaille“ zuerkannt und die k. k. Photographische Gesellschaft würdigte seine photographischen Arbeiten durch die Verleihung der „Voigtländer Medaille“ im Jahre 1900 und der „Goldenen Medaille“ im Jahre 1911.

Die vielseitige, rastlose und aufreibende Tätigkeit Doležal's sollten leider nicht ohne Folgen für seinen Gesundheitszustand bleiben und führte schließlich vorübergehend zu einer Übermüdung, die ihn veranlaßte, am 1. Oktober 1930 noch vor der Erreichung der akademischen Altersgrenze sein Lehramt zurückzulegen und in den dauernden Ruhestand zu treten.

Alle, die das Glück hatten, sein völliges Aufgehen in den über alles geliebten Beruf aus der Nähe kennenzulernen, wissen, daß dieser Entschluß nur auf seine Besorgnis zurückzuführen ist, das Lehramt nicht mehr in dem Maße und Umfang ausüben zu können, wie er es durch mehr als 43 Jahre gewohnt war.

Wohl wenige Menschen besitzen die Kraft, sich freiwillig vom liebgewordenen Beruf loszureißen und die Stelle ihres bisher erfolgreichen Wirkens nunmehr einem Nachfolger zu überlassen. Zu einem solchen Schritt gehört

außer ganz besonderer Gewissenhaftigkeit und weitgehender Selbstbeherrschung auch die Tatkraft, den gefaßten Entschluß ungesäumt zu verwirklichen. Wie immer im Leben Doležal's hat ihm auch hier seine rasche Entschlußfähigkeit den erstrebten Erfolg gebracht: Die wenigen Monate, die wirklich der Erholung gewidmet waren, brachten ihm die lang ersehnte Wiederherstellung.

An der Gesundheit gefestigt, trat Doležal nunmehr in den Ruhestand als akademischer Lehrer, den wohl selten jemand so „wohlverdient“ hat wie er, nicht aber in den Stand der Ruhe; denn seine wiedergewonnene Gesundheit und seine unverminderte Schaffenslust bürgen für ein weiteres erfolgreiches Wirken, für ein neues Leben voll Arbeit und Regsamkeit.

An seinem 70. Geburtstage beglückwünschen wir Doležal, der uns aufrecht und ungebeugt von der Last der Jahre entgegentritt, den klaren und gütigen Blick unentwegt vorwärts gerichtet, von der ihm eigenen unversiegbaren Begeisterung erfüllt und beherrscht von Gedanken und Plänen, die dem Fortschritt, der Forschung und Wissenschaft und der Hebung des Berufsstandes gewidmet sind.

Doležal war aber nicht nur akademischer Lehrer und bahnbrechender Forscher, er war auch Mensch, und dies im ganzen Sinne des Wortes, denn unzählige Wohltaten hat dieser wahrhaft edle und gute Mann vollbracht.

In ehrender Dankbarkeit gedenken daher seiner die vielen Schüler, Kollegen und Mitbürger, für die er unermüdlich bereit war, nicht nur Rat und Trost in warmen, mitfühlenden Worten zu spenden, sondern, wenn es nottat, auch werktätige Hilfe mit dem Einsatz seiner ganzen Person zu gewähren.

Ein gütiges Geschick erhalte Doležal auch fernerhin in voller Gesundheit und geistesfrischer Schaffensfreude, in ungetrübtem, sorgenfreiem und kummerlosem Dasein noch recht, recht lange, zum Nutzen der Wissenschaft und zur aufrichtigsten Freude seiner Mitmenschen! Möge Doležal die liebliche Kurstadt Baden — Geburts- und Ruhestätte seines geschätzten Lehrers, Gönners und späteren Freundes — alles für einen angenehmen und genußreichen Lebensabend bieten!

Dies ist zur 70. Wiederkehr seines Wiegenfestes der herzlichste Wunsch, den ihm alle in dankbarer Verehrung darbringen.

Ing. Franz Winter, wirkl. Hofrat.

Verzeichnis der Schriften Doležals.

Zusammengestellt von Franz Winter.

I. Druckwerke in Buchform.

1. Die Anwendung der Photographie in der praktischen Meßkunst.
Verlag W. Knapp in Halle a. d. S. 1896.
2. Theoretische und praktische Anleitung zum Nivellieren.
Zugleich 10. neubearbeitete Auflage des Werkes von S. Stampfer. Wien 1902,
Druck und Verlag von Karl Gerold's Sohn, Wien.
3. Hand- und Lehrbuch der Niederen Geodäsie.
3 Bände. Neubearbeitung und Erweiterung des von F. Hartner begründeten Lehr-
buches. Verlag von Seidel & Sohn, Wien.
 9. Auflage erschienen 1903/04
 10. „ „ 1910
 11. „ „ 1921
4. Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln
von S. Stampfer. Neubearbeitet von Eduard Doležal. Druck und Verlag von
Karl Gerold's Sohn, Wien. Schulausgabe:
 20. Auflage erschienen 1903
 21. „ „ 1909
 22. „ „ 1919
 23. „ „ 1921
5. Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln
von S. Stampfer. Neubearbeitet von Eduard Doležal. Druck und Verlag
von Karl Gerold's Sohn, Wien. Ausgabe für Praktiker von Doležal verfaßt:
 1. Auflage erschienen 1904
 2. „ „ 1912
 3. „ „ 1921
6. Fünfstellige logarithmisch-goniometrische Tafeln.
Erschienen 1922 bei Seidel & Sohn, Wien.

II. Beteiligung als Mitarbeiter an Sammelwerken.

1. Montanistischer Kalender.
Herausgegeben von Prof. Hans Freiherr v. Jüptner. Bearbeitung des Abschnittes:
Erklärungen, Formeln und Tabellen aus dem Gebiete der Sphärischen
Astronomie zum Zwecke von Meridian- und Zeitbestimmungen. Vom Jahre 1900 bis
1911 in Neubearbeitungen von Doležal allein und in den Jahren 1912 bis 1916
von Schumann und Doležal besorgt.
2. Jahresberichte der Technischen Hochschule in Wien.
Jahr 1908/09: Inaugurationsrede.
Nekrolog für die Professoren Christian Ulrich, Richard Eng-
länder, Dr. Anton Scheil und Wenzel Ottokar Noltsch.
Jahr 1925/26: Nekrolog für Hofrat Prof. Dr. Emanuel Czuber.
Jahr 1926/27: Nekrolog für Prof. Hermann Daub.
3. Lexikon für Photographie und Reproduktionstechnik von G. H.
Emmerich, Wien-Leipzig 1910.
Alle Stichworte, die auf Photogrammetrie Bezug haben.
4. Angewandte Photographie in Wissenschaft und Technik von
K. W. Wolf-Czapек, Berlin 1911.
Abschnitt: Photogrammetrie.

5. Die k. k. Technische Hochschule in Wien 1815—1915.

Herausgegeben von Hofrat Prof. Dr. J. Neuwirth.

Beiträge von Doležal:

- a) Die Lehrkanzeln und Sammlungen für praktische Geometrie (Geodäsie), Geodätisches Zeichnen und Technik des Katasterwesens;
- b) Das Prüfungswesen: Einzelprüfungen, Staatsprüfungen, Strenge Prüfungen und Doktorat;
- c) Einrichtungen zur materiellen Förderung der Studentenschaft:
Stipendien und Prämien,
Techniker-Unterstützungsverein,
Rudolfinum,
Mensa technica und
weitere Wohlfahrtseinrichtungen.

III. Abhandlungen in periodischen Schriften.

1. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien.

- 1902 Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems von einem Standpunkte bei Verwendung der Reflexe.
- 1906 Das Problem der sechs Strahlen und der sieben Punkte in der Photogrammetrie.
- 1908 Über die graphische Darstellung der Intensität und Quantität der solaren Bestrahlung.
- 1909 Das Scheiben-Planimeter von Stampfer.
- 1910 Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre, gelöst auf planimetrischem Wege, 1. Abhandlung.
- 1915 Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre, gelöst auf photogrammetrischem Wege, 2. Abhandlung.
- 1916 Das Pantograph-Planimeter.
- 1918 Photogrammetrische Lösung des Wolkenproblems aus einem Standpunkte bei Verwendung des Wolkenschattens.
- 1922 Reihenumkehrung, Anwendung in der Ausgleichsrechnung.

2. Sitzungsberichte der Südslawischen Akademie der Wissenschaften in Agram.

- 1892 Über Rotations- und Regelflächen.
- 1893 Über die Auflösung von numerischen Gleichungen.
- 1894 Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion.
- 1895 Über den Teilt faktor. (1. Abhandlung.)
- 1898 Über den Teilt faktor. (2. Abhandlung.)

3. Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid.

- 1924 (1928) Determinación de un punto en el espacio per intersección y trisección en topografía y en fotogrametria terrestre.

4. Hoppe's Archiv für Mathematik und Physik.

- 1895 Über partielle Differentialgleichungen von Regel- und Rotationsflächen.
- 1896 Neue Relationen über die dem Kreise ein- und umgeschriebenen Polygone.

5. Zeitschrift für Mathematik und Physik.

- 1902 Das Fünf- und Dreistrahlenproblem in der Photogrammetrie.
- 1906 Das Grundproblem der Photogrammetrie, seine rechnerische und graphische Lösung nebst Fehleruntersuchungen.

6. Zeitschrift für Vermessungswesen.

- 1902 Über das Gesichts- und Aufnahmefeld bei photogrammetrischen Aufnahmen.
- 1905 Das Präzisions-Nivellier-Instrument von Pof. Schell.
- 1906 Photogrammetrische Punktbestimmung aus einem Standpunkte.
Photogrammetrische Arbeiten in Schweden.

7. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
 1927 Hofrat Prof. Dr. Emanuel Czuber.
 8. Zeitschrift für Angewandte Mathematik.
 1926 Hofrat Prof. Dr. Emanuel Czuber.
 9. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen.

a) Wissenschaftliche Artikel.

- 1907 Genauigkeit und Prüfung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme.
 Historisches zur gewöhnlichen Röhrenlibelle und zur Doppellibelle.
 1908 Eine vorteilhafte Abänderung an dem Gefäße eines Fortin'schen Barometers.
 Über das Pentagonalprisma und seine Verwendung.
 1910 Barometrischer Rechenschieber von G. Baumgart.
 Über die Versicherung von Polygonpunkten.
 1912 Nivellierinstrumente der Firma Carl Zeiss in Jena.
 Hundert Jahre deutscher Präzisionsmechanik 1812—1912.
 1913 Beitrag zum Rückwärtseinschneiden.
 1921 Ein neues Prismenkreuz, das Kreuzvisier von Hensoldt.
 1922 Broch'sches Diagramm für die Korrektion der Lattenhöhen beim Nivellieren mit Libellenausschlägen.
 Lineare Meridiankonvergenz der Randlinien der Katastersektionen.
 1928 Rückwärts- und Vorwärtseinschneiden mit der Rechenmaschine.
 1931 Zehn Jahre österreichisches Bundesvermessungsamt.

b) Abhandlungen zur Organisation und Reform des Vermessungswesens und des Unterrichtes.

- 1907 Zur Veränderung des Konkretualstatuts der k. k. Vermessungsbeamten.
 1908 Stellungnahme zu einem vom Herrenhause angenommenen neuen Gesetzentwurfe.
 Die neue technische Zentralstelle.
 Akademie des Prof. Andonović für Geodäsie und Bauwesen.
 1910 Bericht über die 3. Hauptversammlung des Vereines der österreichischen k. k. Vermessungsbeamten.
 Zur Wiedererrichtung der Generaldirektion des Grundsteuerkatasters.
 1911 Der 1. österreichische Geometertag zu Wien 1912.
 Staatsgeprüfte Absolventen der Kurse zur Heranbildung von Vermessungsgeometern an den K. K. Technischen Hochschulen Österreichs.
 Das Technische Museum für Industrie und Gewerbe in Wien.
 1912 Fachschule für Geodäsie etc.
 Geodätische Disziplinen an den Technischen Hochschulen Österreichs, Deutschlands und der Schweiz.
 1913 Neue Prüfungsvorschriften in der Schweiz.
 Erste Hauptversammlung der „Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie“ in Wien.
 1915 Lehrkanzel für Praktische Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien.
 1916 Reform des staatlichen Vermessungswesens.
 1917 Hundert Jahre österreichischer Kataster.
 1918 Zur Kenntnisnahme und Erwägung.
 Bemerkung zu der Erwiderung der Vereinsleitung betreffend die Beschlüsse des Professorenkollegiums der Grazer Technischen Hochschule.
 Standesfragen der österreichischen Geometerschaft.
 Über das Markscheidewesen.
 1919 Geleitworte zur Vollzugsanweisung vom 6. Juli 1919, betreffend einheitliche Regelung des gesamten staatlichen Vermessungswesens.
 1920 Bericht über die Hauptversammlung des österreichischen Geometervereines am 2. Februar 1920 mit eingehendem Referat über den Stand der Studienreform.
 1921 Das Bundesvermessungsamt.

- 1922 Kartographisches, früher Militärgeographisches Institut in Wien.
 1923 Die Normal-Eichungs-Kommission und das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien.
 Geschäftsteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen.

c) Biographische Skizzen und Nekrologe.

- 1907 Hofrat Professor Niessl von Mayendorf.
 1909 Nachruf Prof. Hofrat Dr. A. Scheil.
 Nachruf Prof. J. Lička.
 1910 Feier zu Ehren des Herrn Ministerialrates Professor Dr. W. Tinter.
 Professor Florian Lederer.
 1911 Professor Dr. K. Koppe.
 1913 Hofrat Julius Jusa.
 1914 Hofrat A. Broch.
 1917 Generaldirektor Sektionschef Dr. W. Globočník.
 Hofrat Professor Dr. E. Weiß.
 1928 Hofrat Prof. Dr. techn. h. c. und Dr. mont. h. c. Franz Lorber.
 1931 Hofrat Prof. Dr. agrar., Dr., Dr. agrar. Carl Fruwirth.

d) Bücherbesprechungen.

Ausführliche Rezensionen von 252 Werken.

10. Internationales Archiv für Photogrammetrie.

a) Wissenschaftliche Artikel.

- Band I 1908—1909 Über die Bedeutung der photogrammetrischen Meßkunst.
 Inaugurationsrede.
 Die Photographie und Photogrammetrie im Dienste der Denkmalpflege und das Denkmälerarchiv.
 Ein Beitrag zur Stereophotogrammetrie. (Ableitung der Fundamentalfomeln.)
 Über die Photokatastral-Methode von Gautier.
 Band II 1909—1911 Aufnahme der Baudenkmäler Griechenlands durch die königliche Meßbildanstalt in Berlin.
 Band III 1911—1913 Der Stereo-Autograph des k. u. k. Hauptmannes Eduard Ritter von Orel.
 Instrumentelle Neuerungen.
 Band IV 1913—1914 Über Photogrammetrie.
 Vortrag, gehalten in der „Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte“ am 25. September 1913 im Parlament in Wien.
 Hauptversammlung der „Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie“ zu Wien, im September 1913.
 Band V 1915—1919 Instrumentelle Neuerungen.
 Band VI 1919—1923 Zur Würdigung der Preußischen Meßbildanstalt in Berlin.
 Das Phototachymeter Doležal-Rost.
 Aërophotographie und Aërophotogrammetrie im Weltkriege.
 Photogrammetrische Instrumente. Schöpfungen der letzten Jahre.
 Der gegenwärtige Stand der Photogrammetrie in den verschiedenen Staaten.

b) Biographische Skizzen und Nekrologe.

- Band I 1908—1909 Aimé Lassedad, der Begründer der Photogrammetrie, sein Leben und seine wissenschaftlichen Arbeiten.
 Band II 1909—1911 Hofrat Professor Dr. Anton Scheil.
 Hauptmann Theodor Scheimpflug. Sein Leben und seine Werke.

- Band III 1911—1913 Enthüllung des Denkmals für Oberst Aimé Laussedadat in Moulins.
 Band IV 1913—1914 R. J. Thiele.
 Band V 1915—1919 Ingenieur Gustav Kammerer.
 Oberstleutnant Sigismund Trück.
 Ministerialrat Prof. Ferdinand Edler von Wang.
 Band VI 1919—1923 Professor Karl Fuchs.
 Ingenieur Pio Paganini.
 Regierungsrat Franz Schiffner.
 Geheimrat Dr. A. Meydenbauer.
 Band VII/1 1930 La vie et l'oeuvre de M. Dr. E. G. Deville.
 c) *Bücherbesprechungen.*
 Rezension von 67 Werken.

11. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines.
 1901 Festlegung eines polygonalen Zuges bei Verwendung neuer Instrumente für die optische Distanzmessung.
 1902 Der Hammer-Fennel'sche Tachymeter-Theodolit.
12. Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst.
 1903 Zur Absteckung nach der Viertels-Methode.
 1917 Leben und technisches Wirken des Feldzeugmeisters Otto Frank.
 1920 Stampfer'sche Instrumente für die Aufnahme von Polygonzügen in der Grube.
 Ausführliche Rezension von 41 Werken.
13. Österreichische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen.
 1903 Graphische Bestimmung der Zeit und des Meridianes.
 1906 Das Gruben-Nivellier-Instrument von Oberbergrat Prof. Cseti und seine Modifikation nach Prof. Doležal.
 Historische Sammlung an Markscheiderischen Instrumenten an der k. k. Montanistischen Hochschule in Leoben.
 1907 Markscheiderische und geodätische Instrumente des Oberbergrates Prof. Cseti.
 1908 Universal-Grubenspreize und Zentrierapparat der Gebr. Rost in Wien.
 Besprechung von 8 Werken.
14. Fachzeitschrift „Der Mechaniker“.
 1897 Phototheodolit von Rocha.
 Über zentrisch und exzentrisch gebaute photogrammetrische Instrumente.
 1898 Photogrammetrische Instrumente von Baron Hübl.
 Phototheodolit von J. Bridges-Lee.
 1898 Distanzmesser mit Teleobjektiv.
 1899 Paganini's photogrammetrische Instrumente und Apparate für die Rekonstruktion photogrammetrischer Aufnahmen.
 Das Scheimpflug'sche Verfahren zur Herstellung von Karten und Plänen aus Photographien.
 1900 Über einige neue photogrammetrische Instrumente.
 1901 Grevé's Phototheodolit.
 1902 Über Porro's Instrumente für photogrammetrische Zwecke.
 Die photogrammetrische Meßtischkamera von Dr. Hamberg und das Phototachymeter von Salmoiraghi.
15. Jahrbuch der Montanistischen Hochschulen zu Leoben und Příbram.
 1902 Trigonometrische Punktbestimmung durch Einschneiden und Hansen's Problem.
 1906 Planimeter-Studien.

- 1907 Planimeter-Studien. (Schluß.)
- 1908 Markscheiderische Studien.
- 1909 Markscheiderische Studien. (Fortsetzung.)
- 1910 Markscheiderische Studien. (Schluß.)
16. *Eder's Jahrbuch für Photographie und Reproduktionstechnik.*
- 1899 Über die Änderung des Bildfeldwinkels bei Verschiebung des Objektivs in vertikaler Richtung.
- 1894—1920 Arbeiten und Fortschritte auf dem Gebiete der Photogrammetrie in den Jahren 1894—1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902/03, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908/09, 1910/12, 1913, 1914—1920.
- 1900—1903 Arbeiten und Fortschritte auf dem Gebiete der Stereoskopie in den Jahren 1900, 1901, 1902 und 1903.
17. *Jahrbuch des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien.*
- 1900 Über die Anwendung der Photogrammetrie.
- 1910 Über Ballonphotographie und ihre Verwendung.
18. *Verhandlungen des 1. Internationalen Kongresses für angewandte Photographie in Dresden 1909.*
- 1909/10 Über die Bedeutung der Photogrammetrie.
19. *Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, Leipzig.*
- 1913 Über Photogrammetrie.
20. *Photographische Korrespondenz.*
- 1896 Photogrammetrische Vermessungen in Kanada.
- 1898 Photogrammetrie auf der Naturforscherversammlung zu Braunschweig 1897.
Phototheodolit von Bridges-Lee.
Über Photogrammetrische Rekonstruktion und die Hilfsmittel zu ihrer Ausführung.
- 1902 Über Porro's Instrument für photogrammetrische Zwecke.
21. *Archiv für wissenschaftliche Photographie.*
- 1899 Photographie und Photogrammetrie im Dienste der Denkmalpflege.
22. *Photographische Blätter.*
Bericht über die 59. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Braunschweig 1897.
23. *Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens.*
- 1902 Zur graphischen Bestimmung der Zeit und des Meridians.
24. *Zeitschrift „Školski vjestnik“ (Unterrichts-Nachrichten).*
- 1894—1899 Methoden des geometrischen Unterrichtes.
Über Erdmagnetismus und die magnetische Vermessung von Bosnien und der Herzegowina.
Über die Tag- und Nachtgleiche.
Das Leben und wissenschaftliche Arbeiten von Pasteur.
Über Röntgenstrahlen.
Über die Linde'sche Methode der Verflüssigung der Luft.
Über die Anlage einer Heimatkunde.
Über Kettenbrüche.
25. *Organ des Landes-Museums in Sarajevo.*
- 1895 Abhandlung: „Über den Verlauf der Wasserscheide zwischen dem Pontus und der Adria“.

1899 Diese Abhandlung erschien auch in dem Werke: „Wissenschaftliche Abhandlungen aus Bosnien.“

26. Mitteilungen aus dem Markscheidewesen.

1920 Über die Ausbildung von Markscheidern in Österreich.

IV. Vorträge.

Doležal hat für die Verbreitung, Förderung und Würdigung seines Faches viele Vorträge in rein wissenschaftlichen, technischen und militärischen Kreisen gehalten, die hier nur zusammenfassend wiedergegeben werden mögen.

1. Vorträge auf rein geodätischem Gebiete:

1908, 1909, 1910, 1913, 1929 in Wien.

2. Vorträge, die das Gesamtgebiet der Photogrammetrie betreffen:

1894 Sarajevo, 1900 Wien, 1903 Bruck a. d. Mur, 1909 Leoben und Dresden, 1913 Wien.

3. Vorträge über Architektur-Photogrammetrie:

1898 Wien, 1906 Wien, 1908 Wien.

4. Vorträge über Anwendung der Photogrammetrie in der Kunst und Denkmalpflege:

1906 Wien, 1907 Wien, 1908 Wien.

5. Vorträge über Ballonphotogrammetrie:

1909 und 1910, 1922 und 1923 Wien.

6. Vorträge markscheiderischen Inhaltes:

1906, 1908, 1912, 1916–1919, 1922 Wien.

7. Vorträge anlässlich wissenschaftlicher Tagungen:

Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte 1897 Braunschweig, 1913 Wien.

8. Diverse Vorträge, gehalten in großen fachwissenschaftlichen und wissenschaftlichen Körperschaften, und zwar:

im Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Verein:

in den Fachgruppen für Bauingenieure, für Architekten, für Berg- und Hüttenleute, für Vermessungswesen,

im Österr. Verein für Vermessungswesen,

in der Österr. Gesellschaft für Photogrammetrie,

in der Geographischen Gesellschaft,

in der Meteorologischen Gesellschaft,

in der Photographicen Gesellschaft u. a. m.

Zur Berechnung von Geoidundulationen aus Schwerkraftstörungen.

Von Privatdozent Dr. F. A c k e r l, Wien.

In zahlreichen Abhandlungen über diesen Gegenstand hat F. Hopfner (1) *) auf die Bedeutung des Terms von Bruns hingewiesen und ein streng potentialtheoretisch begründetes Verfahren zur Berechnung der Geoidundulationen angegeben (2).

Unter der Voraussetzung eines kugelförmigen Erdkörpers vom Radius a hat Hopfner festgestellt, daß die Wirkung der Geoidundulationen N in der scheinbaren Schwerkraftstörung $(g - \gamma')$ viermal größer ist als der Einfluß der kontinentalen und ozeanischen Massenunregelmäßigkeiten. Die Massenunregelmäßigkeiten ersetzt Hopfner (3) durch eine Flächenbelegung der Kugeloberfläche und entwickelt die Beziehung

$$g - \gamma' = \frac{3\gamma}{2a} N \quad \text{bzw.} \quad N = \frac{2a}{3\gamma} (g - \gamma').$$

Wenn wir diese Formel zur Abschätzung von Geoidundulationen verwenden für ein auf der physischen Erde gegebenes System von scheinbaren Schwerkraftstörungen, dann geschieht dies unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß die Abplattung der Erde vernachlässigt werden darf (4).

Nachfolgend soll gezeigt werden, welche Änderungen zu erwarten sind, wenn die Erde als abgeplattetes Sphäroid aufgefaßt wird.

Es sei $W = U + T$ die Kräftefunktion der Erde; dann ist U die Kräftefunktion des homogenen Sphäroids mit der Dichte ρ_m und dem Äquatorradius a . Die Restfunktion T (verursacht durch die Massenunregelmäßigkeiten der physischen Erde) ist das Potential der Massenbelegung des Sphäroids.

Bezeichnet n die äußere Sphäoidnormale, so erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial n} = -g, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\gamma, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial (W - U)}{\partial n} = -(g - \gamma).$$

Den Übergang vom scheinbaren (γ') zum wahren Niveausphäroid (γ) vermittelt der Term von Bruns $N \frac{\partial \gamma}{\partial n}$ im Sinne von

$$\gamma' = \gamma + N \frac{\partial \gamma}{\partial n}.$$

Nunmehr läßt sich zwischen der scheinbaren und der wahren Schwerkraftstörung die Beziehung

$$(g - \gamma') = (g - \gamma) - N \frac{\partial \gamma}{\partial n}$$

aufstellen und im Hinblick auf $\frac{\partial T}{\partial n} = -(g - \gamma)$ folgt

*) Siehe Literaturhinweis!

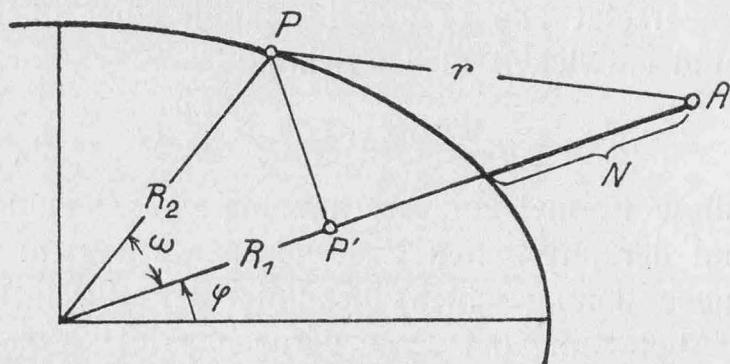
$$(g - \gamma') = -\frac{\partial T}{\partial n} - N \frac{\partial \gamma}{\partial n}.$$

Der erste Ausdruck rechts gibt den Anteil der Massenunregelmäßigkeiten, der zweite Ausdruck hingegen den Anteil der Undulationen an der Größe der scheinbaren Schwerkraftstörung $(g - \gamma')$.

Die Massenbelegung der Sphäroidoberfläche ist mit dem Flächenelement do gegeben durch $\rho H do$. Dieses Massenelement wird in der Figur in P angenommen, so daß für den Aufpunkt A die Restfunktion T zu berechnen ist aus

$$T = \int \frac{\rho H do}{r}.$$

Hiebei ist über die gesamte Oberfläche des Sphäroids zu integrieren. Der Betrag der Undulation N (in Strenge auf der Normalen des Sphäroids zu messen) wird hier mit durchaus zulässiger Näherung in den Radiusvektor des Aufpunktes verlegt.



Nach den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen ergibt sich r aus dem Ansatz

$$r^2 = (PP')^2 + (P'A)^2 = R_2^2 \sin^2 \omega + (R_1 + N - R_2 \cos \omega)^2.$$

Setzt man $R_1 = a [1 - \alpha \sin^2 \varphi]$, $R_2 = a [1 - \alpha \sin^2 (\varphi + \omega)]$ und vernachlässigt N^2 (für einen Größtwert $N \doteq 1$ km, ist $\frac{N}{a} \doteq 0.2$ m) wie auch α^2 , so wird

$$\begin{aligned} r^2 &= 2a^2 \left(2 \sin^2 \frac{\omega}{2} [1 - \alpha \sin^2 \varphi - \alpha \sin^2 (\varphi + \omega)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N}{a} \left\{ 1 - \alpha \sin^2 \varphi - [1 - \alpha \sin^2 (\varphi + \omega)] \cos \omega \right\} \right). \end{aligned}$$

Das Oberflächenelement $do = R_2^2 \cos (\varphi + \omega) d\lambda d\omega$ nimmt bei Unterdrückung von α^2 den Wert

$$do = a^2 [1 - 2\alpha \sin^2 (\varphi + \omega)] \cos (\varphi + \omega) d\lambda d\omega$$

an und nach Ausführung der Integration über $\lambda \Big|_0^{2\pi}$ ergibt sich

$$T = a \rho \pi H \sqrt{2} \cdot \mathcal{J}_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

wobei

$$\mathcal{J}_1 = \sqrt{\frac{[1 - 2\alpha \sin^2 (\varphi + \omega)] \cos (\varphi + \omega) d\omega}{\left(2 \sin^2 \frac{\omega}{2} [1 - \alpha \sin^2 \varphi - \alpha \sin^2 (\varphi + \omega)] + \frac{N}{a} \left\{ 1 - \alpha \sin^2 \varphi - [1 - \alpha \sin^2 (\varphi + \omega)] \cos \omega \right\} \right)}}$$

Unter Beachtung von

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial N}$$

entsteht

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\rho \pi H}{\sqrt{2}} \cdot \mathcal{J}_2 \quad \dots \dots \dots \dots \quad 4)$$

wobei

$$\mathcal{J}_2 = \int \frac{[1-2\alpha \sin^2(\varphi+\omega)] \cos(\varphi+\omega) \{1-\alpha \sin^2 \varphi - [1-\alpha \sin^2(\varphi+\omega)] \cos \omega\} d\omega}{\sqrt{\left(2 \sin^2 \frac{\omega}{2} [1-\alpha \sin^2 \varphi - \alpha \sin^2(\varphi+\omega)] + \frac{N}{a} \{1-\alpha \sin^2 \varphi - [1-\alpha \sin^2(\varphi+\omega)] \cos \omega\}\right)^3}}$$

Die Größen T und $\frac{\partial T}{\partial n}$ sind für die Oberfläche des Sphäroides, also für $N = 0$ zu entwickeln und zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen werden die Grenzfälle $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 90^\circ$ betrachtet.

Man erhält sodann

$$1.) \quad \varphi = 0^\circ, \quad N = 0.$$

$$T_0 = a \rho \pi H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \alpha \sin^2 \omega) \cos \omega d\omega}{\sin \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \omega}} = a \rho \pi H \cdot \mathcal{J}_0 \quad \dots \dots \quad 5)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial n} = -\frac{\rho \pi H}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \alpha \sin^2 \omega) \cos \omega [1 - (1 - \alpha \sin^2 \omega) \cos \omega] d\omega}{\sin^3 \frac{\omega}{2} \sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \omega)^3}} = -\frac{\rho \pi H}{4} \cdot \mathcal{J}'_0 \quad 6)$$

$$2.) \quad \varphi = 90^\circ, \quad N = 0.$$

$$T_{90} = -a \rho \pi H \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \alpha \cos^2 \omega) \sin \omega d\omega}{\sin \frac{\omega}{2} \sqrt{[1 - \alpha (1 + \cos^2 \omega)]}} = -a \rho \pi H \cdot \mathcal{J}_{90} \quad \dots \quad 7)$$

$$\frac{\partial T_{90}}{\partial n} = \frac{\rho \pi H}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \alpha \cos^2 \omega) \sin \omega [1 - \alpha - (1 - \alpha \cos^2 \omega) \cos \omega] d\omega}{\sin^3 \frac{\omega}{2} \sqrt{[1 - \alpha (1 + \cos^2 \omega)]^3}} = \frac{\rho \pi H}{4} \cdot \mathcal{J}'_{90} \quad 8)$$

Mit Übergehung der recht langwierigen Umformungen wird hier das Ergebnis der Integrationen mitgeteilt.

$$\left. \begin{aligned} 1.) \quad \mathcal{J}_0 &= 4\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{5}\alpha\right), \quad \mathcal{J}'_0 = 8\sqrt{2} \left(1 + \frac{17}{15}\alpha\right) \\ 2.) \quad \mathcal{J}_{90} &= 4 \left(1 - \frac{1}{5}\alpha\right), \quad \mathcal{J}'_{90} = 8 \left(1 - \frac{8}{15}\alpha\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \quad 9)$$

Schließlich findet man aus den Gleichungen 5) und 6)

$$\frac{\frac{\partial T_0}{\partial n}}{T_0} = -\frac{1}{4a} \cdot \frac{\mathcal{J}'_0}{\mathcal{J}_0} = -\frac{1}{2a} \left(1 + \frac{4}{3}\alpha\right); \quad \frac{\frac{\partial T_0}{\partial n}}{T_0} = -\frac{T_0}{2a} \left(1 + \frac{4}{3}\alpha\right) \quad \dots \quad 10)$$

und aus den Gleichungen 7) und 8) entsteht

$$\frac{\partial T_{90}}{\partial n} = -\frac{1}{4a} \cdot \frac{\mathcal{I}_{90}'}{\mathcal{I}_{90}} = -\frac{1}{2a} \left(1 - \frac{1}{3}\alpha\right); \quad \frac{\partial T_{90}}{\partial n} = -\frac{T_{90}}{2a} \left(1 - \frac{1}{3}\alpha\right) \dots 11)$$

Für $\alpha = 0$ (Kugel) ergibt sich die von Hopfner (3) abgeleitete Beziehung

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{T}{2a}.$$

Zur Berechnung des Terms von Bruns in Gl. 1) lässt man das allgemeine dreiaachsige Sphäroid (nach S. Oppenheim, Vorlesungen über die Theorie der Mondbewegung, Universität Wien, 1924) mit den Halbachsen

$$a_1 = \sqrt{K^2 + \tau_1}, \quad a_2 = \sqrt{K^2 + \tau_2}, \quad a_3 = \sqrt{K^2 + \tau_3}$$

und dem Potential

$$U_0 = M \left(\frac{1}{r} + \frac{3}{10} \cdot \frac{\tau_1 \xi^2 + \tau_2 \eta^2 + \tau_3 \zeta^2}{r^5} \right) \dots 12)$$

übergehen in das abgeplattete Sphäroid mit dem Äquatorradius $a = a_1 = a_2$, der Rotationsachse $b = a_3$ und dem Radiusvektor $R = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi)$. Mit der Annahme eines mittleren Radiusvektors C ergibt sich die Masse M des homogenen Sphäroids von der Dichte ρ_m aus

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_m C^3.$$

Die weitere Festsetzung: $a = C \left(1 + \frac{1}{3}\alpha\right)$, $b = C \left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right)$ führt mit dem Radiusvektor $r = R + N$ des Aufpunktes nach einigen Umformungen der Gleichung 12) zu dem Potential

$$U_0 = \frac{4\pi \rho_m a^3 \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^3}{3\{a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) + N\}} + \frac{4\pi \rho_m a^5 \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right)}{5\{a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) + N\}^3} \dots 13)$$

Hieraus erhält man mit $\gamma = -\frac{\partial U_0}{\partial n} = \frac{\partial U_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial n} \doteq \frac{\partial U_0}{\partial N}$,

$$\gamma = \frac{4\pi \rho_m a^3 \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^3}{3\{a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) + N\}^2} + \frac{4\pi \rho_m a^5 \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^5 \left(1 - 3 \sin^2 \varphi\right)}{5\{a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) + N\}^4} \quad 14)$$

und weiters auf Grund von $\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial n} \doteq \frac{\partial \gamma}{\partial N}$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{8\pi \rho_m a^3 \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^3}{3\{a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) + N\}^3} - \frac{16\pi \rho_m a^5 \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^5 \left(1 - 3 \sin^2 \varphi\right)}{5\{a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) + N\}^5} \quad 15)$$

Die Beträge γ und $\frac{\partial \gamma}{\partial n}$ werden wieder für die Oberfläche des Sphäroids, also für $N = 0$ benötigt. Bei Vernachlässigung von α^2 ergibt sich

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{8\pi \rho_m}{15} \left\{ 5 + \alpha(1 - 3 \sin^2 \varphi) \right\},$$

$$\gamma = \frac{4\pi \rho_m}{15} a \left\{ 5 - \alpha(2 - \sin^2 \varphi) \right\}.$$

Durch Division dieser Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2\gamma}{a} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{5}(3 - 4 \sin^2 \varphi) \right\} \dots \dots \dots \quad 16)$$

so daß sich für die beiden Grenzfälle von vorhin $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 90^\circ$ die folgenden Werte ergeben:

$$1.) \varphi = 0^\circ, \frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2\gamma}{a} \left\{ 1 + \frac{3}{5}\alpha \right\}; \quad 2.) \varphi = 90^\circ, \frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2\gamma}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{5}\alpha \right\}. \quad 17)$$

Bei Beachtung des Theorems von Bruns, wonach $T = -N\gamma$, gehen die beiden Formeln 10) und 11) über in

$$\left. \begin{array}{l} 1.) \frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{N\gamma}{2a} \left(1 + \frac{4}{3}\alpha \right) \\ 2.) \frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{N\gamma}{2a} \left(1 - \frac{1}{3}\alpha \right) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 18)$$

Führt man nun die zusammengehörigen Ergebnisse der Gl. 17) und 18) in die Ausgangsformel 1) ein, so ergibt sich schließlich nach einigen Umformungen

$$\left. \begin{array}{l} 1.) \varphi = 0^\circ, g - \gamma' = \frac{3N\gamma}{2a} \left\{ 1 + \frac{16}{45}\alpha \right\}, \\ 2.) \varphi = 90^\circ, g - \gamma' = \frac{3N\gamma}{2a} \left\{ 1 - \frac{7}{45}\alpha \right\}. \end{array} \right\} \dots \dots \quad 19)$$

Aus vorgegebenen scheinbaren Schwerkraftstörungen ($g - \gamma'$) können demnach die Undulationen N des Geoids berechnet werden nach

$$\left. \begin{array}{l} 1.) \varphi = 0^\circ, N = (g - \gamma') \cdot \frac{2a}{3\gamma} \left(1 - \frac{16}{45}\alpha \right) \\ 2.) \varphi = 90^\circ, N = (g - \gamma') \cdot \frac{2a}{3\gamma} \left(1 + \frac{7}{45}\alpha \right) \end{array} \right\} \dots \dots \quad 20)$$

Für $\alpha = 0$ (Kugel) finden wir die von Hopfner mitgeteilte und bereits eingangs erwähnte Beziehung

$$N = \frac{2a}{3\gamma} (g - \gamma') \dots \dots \quad 21)$$

Verwendet man diese für die Kugel geltende Formel, zur Abschätzung von Geoidundulationen in bezug auf das Sphäroid, so ist am Ergebnis N eine Verbesserung wegen der Abplattung des Sphäroids anzubringen. Aus den Gl. 20) erkennen wir, daß diese Korrektur ΔN im ungünstigsten Fall ($\gamma = 0^\circ$) gegeben ist durch

$$\Delta N = \frac{16}{45}\alpha \cdot N \text{ oder rund } \Delta N \doteq \frac{\alpha}{3} N,$$

so daß die Größenordnung von $\triangle N$ (bei $\alpha = 1:300$) rund mit

$$\triangle N = \frac{N}{1000}$$

einzuschätzen ist.

Der Gesamtfehler (Beobachtung, Reduktionselemente usw.) eines Wertes ($g - \gamma'$) wird letzten Endes nicht viel kleiner sein als etwa $\pm 0,01 \text{ cmsec}^{-2}$, so daß von vornherein die ermittelten Undulationen nur auf rund $\pm 40 \text{ m}$ sicher sind.

Selbst in dem Falle, als für $(g - \gamma') = -0,25 \text{ cmsec}^{-2}$ eine Hebung $N = -1000 \text{ m}$, also ein Wert berechnet wird, der sehr wahrscheinlich den Höchstwert der Undulationen darstellt (4), entsteht durch die Anwendung der für die Kugel geltenden Formel 21) ein Fehler von etwa 1 m, der nach dem oben Gesagten völlig belanglos ist.

Die von Hopfner in Strenge für die Kugel abgeleiteten Beziehungen zwischen Schwerkraftstörung und Geoidundulation dürfen auch auf das der physischen Erde entsprechende Sphäroid angewendet werden.

* * *

Bei Ableitung der Formel zur Berechnung der Undulationen wird zumeist ein grundsätzlicher Irrtum begangen.

Für eine homogene Kugelschale (Radius a , Dichte ρ) ist das Potential V_a auf die im Außenraum liegende Masseneinheit mit dem Zentralabstand r gegeben durch

$$V_a = 4\pi\rho \frac{a^2}{r},$$

während das Potential V_i der Kugelschale in bezug auf einen im Innenraum liegenden Aufpunkt bestimmt wird durch

$$V_i = 4\pi\rho a.$$

Die Anziehungskraft in der Richtung zum Kugelmittelpunkt erhält man aus

$$\frac{\partial V_a}{\partial r} = -4\pi\rho \frac{a^2}{r^2} = -\frac{V_a}{r}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial r} = 0.$$

Sobald die Aufpunkte sich der Kugelschale unbegrenzt nähern, entsteht

$$\lim_{r \rightarrow a} \frac{\partial V_a}{\partial r} = -4\pi\rho = -\frac{V_a}{a}, \quad \lim_{r \rightarrow a} \frac{\partial V_i}{\partial r} = 0, \quad \dots \quad 22)$$

und die beim Durchgang durch die Kugelschale in bekannter Weise eintretende unstetige Änderung der Anziehungskraft bewirkt, daß

$$\lim_{r \rightarrow a} \left(\frac{\partial V_a}{\partial r} - \frac{\partial V_i}{\partial r} \right) = -4\pi\rho.$$

Erteilt man dem Aufpunkt von allem Anfang an eine feste Lage auf der Kugeloberfläche, so ergibt sich die anziehende Kraft in der Richtung zum Mittelpunkt aus der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi\rho = -\frac{V_a}{2a}.$$

Diese Kraft unterscheidet sich durchaus von den vorhin abgeleiteten Grenzwerten

$$\lim_{r \rightarrow a} \frac{\partial V_a}{\partial r}, \quad \lim_{r \rightarrow a} \frac{\partial V_i}{\partial r}.$$

Ist die Kugelschale nicht homogen und nähert sich der im Außenraum liegende Aufpunkt unbeschränkt der Oberfläche, so tritt an Stelle von 22) nunmehr die Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow a} \frac{\partial V_a}{\partial r} = -2\pi\rho - \frac{V_a}{a} \dots \dots \dots \quad 23)$$

(Siehe: F. R. Helmert, Die physikalischen Theorien, 1884, S. 147.)

Für den Fall des auf der Kugeloberfläche fest angenommenen Aufpunktes bleibt die Formel

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi\rho = -\frac{V}{2a} \dots \dots \dots \quad 24)$$

in Geltung.

Diese Gleichung wurde von Hopfner für die Ableitung der Formel zur Berechnung der Undulationen benutzt.

Hiebei werden die Schwerkraftbeschleunigungen in entsprechenden Punkten des Geoides und des Niveausphäroides miteinander verglichen.

Am Geoid kommen nur Punkte in Frage, die — wie über den Weltmeeren — an der Berandung des Erdkörpers oder — wie im Bereich der Kontinente — im Inneren der Erdmasse liegen.

Bei diesem inneren Problem der Potentialtheorie muß der Aufpunkt in der Massenschichte auf der Kugel gewählt werden und es ist daher die Formel 24) anzuwenden.

Würde man die Berechnung nach Formel 23), wie dies wiederholt geschah, vornehmen, so liefe dieser Vorgang auf die Annahme eines Aufpunktes im Außenraum der Kugelschicht hinaus, der man den Aufpunkt unbegrenzt nähern läßt. Man würde also die Aufgabe des Innenraums als eine Aufgabe des Außenraums behandeln und muß hiedurch notwendigerweise zu einer unrichtigen Lösung des Problems kommen.

Um den grundsätzlichen Unterschied zwischen der inneren und äußeren Aufgabe kommt man auch dadurch nicht herum, daß man — wie auch schon versucht wurde — den Aufpunkt zwischen zwei parallele Massenschichten einschließt, die einander sehr nahe benachbart liegen; denn der Aufpunkt ist sowohl für die eine wie für die andere Schichte ein äußerer Punkt, da er — zwischen den beiden Schichten liegend — keiner von beiden angehört.

L i t e r a t u r h i n w e i s .

1. F. Hopfner, Diese Arbeiten sind erschienen in Gerlands Beiträgen zur Geophysik, und zwar angefangen von Bd. 19, 1928.
2. F. Hopfner, Ein hypothesenfreies Verfahren zur Bestimmung der Geoide, Gerlands Beiträge, Bd. 20, 1928.
3. F. Hopfner, Über die Wirkung der Undulationen auf die Größe der scheinbaren Schwerkraftstörung, Gerlands Beiträge, Bd. 22, 1929.
4. F. Ackerl, Das Geoid I. (Vorbereitende Untersuchungen) Gerlands Beiträge, Bd. 29, 1931.

Zur Fehlertheorie der Verbindungsgeraden geodätisch ermittelter Punkte.

Von Privatdozent Oberbaurat Ing. Dr. techn. A. Basch, Wien.

Um die Genauigkeit der durch Messungen irgendwelcher Art ermittelten Lagebestimmung eines Punktes zu kennzeichnen, wird bei zeichnerischer Darstellung die seinen wahrscheinlichsten Ort P umgebende mittlere Fehlerellipse angegeben. Wahrscheinlichster Ort und mittlere Fehlerellipse sind durch Ortsvektor \mathbf{R} und Fehlertensor T und bei Verwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems (wir wollen uns auf das zweidimensionale ebene Problem beschränken) durch die Skalarkomponenten dieser Extensivgrößen $X, Y, \tau_{xx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yy}$ gegeben. Wenn der Vektor \mathbf{r} mit den Komponenten x und y die Abweichung der wahren Punktlage P^* von der wahrscheinlichsten P , d. i. den „Fehler“, $w(\mathbf{r}) = w(x, y)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten dieses Fehlers bezeichnet, so ist der Fehlertensor

$$T = E(r \cdot r) = \iint_{\infty} r \cdot r w(r) dx dy \dots \dots \dots \quad 1)$$

die mathematische Erwartung der Fehlerdyade $r \cdot r$.

Seine Skalarkomponenten sind dementsprechend

$$\tau_{xx} = E(x^2) = \mu_x^2, \quad \tau_{xy} = E(xy), \quad \tau_{yy} = E(y^2) = \mu_y^2 \dots \quad 1')$$

Die Hauptglieder des Fehlertensors τ_{xx} und τ_{yy} stimmen mit den Quadraten der mittleren Fehler μ_x , bzw. μ_y in der x -, bzw. y -Richtung überein. Die Ellipse

$$\begin{aligned} \tau_{yy} x^2 - 2 \tau_{xy} xy + \tau_{xx} y^2 &= \tau_{xx} \tau_{yy} - \tau_{xy}^2 \dots \dots \dots \quad 2) \\ (\tau_{xx} \tau_{yy} - \tau_{xy}^2 &> 0) \end{aligned}$$

besitzt die Eigenschaft, daß die lotrechte Entfernung jeder ihrer Tangenten vom Mittelpunkt den mittleren Fehler der Lagebestimmung des Punktes in der Richtung der Lotrechten angibt. Gilt für die Fehlerverteilung das von A. Bravais²⁾ verallgemeinerte Gauß'sche Gesetz

$$w(x, y) = \frac{\sqrt{\gamma_{xx} \gamma_{yy} - \gamma_{xy}^2}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{xx} x^2 + 2\gamma_{xy} xy + \gamma_{yy} y^2)}, \dots \quad 3)$$

wobei

$$\gamma_{xx} = \frac{\tau_{yy}}{\tau_{xx} \tau_{yy} - \tau_{xy}^2}, \quad \gamma_{xy} = -\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xx} \tau_{yy} - \tau_{xy}^2}, \quad \gamma_{yy} = \frac{\tau_{xx}}{\tau_{xx} \tau_{yy} - \tau_{xy}^2} \quad 4)$$

die Skalarkomponenten des dem Fehlertensor T reziproken Gewichtstensors

$$\Gamma = T^{-1} \dots \dots \dots \quad 4')$$

¹⁾ A. Basch, Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 137. Bd., Abt. IIa, 1928, S. 583—598. — Fehlertensoren und Fehlerübertragung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 8. Bd. 1928, S. 436—438. — Vgl. auch R. v. Mises, Vorlesungen aus dem Gebiete der Angewandten Mathematik. I. Bd. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig und Wien. 1931, S. 53.

²⁾ A. Bravais, Analyse mathématique sur la probabilité des erreurs de situation d'un point. Mém. Acad. Franç. tome IX, 1846, S. 255—332. — Vgl. auch E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig. 1891, S. 393.

sind, so sind die Orte gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte die zur mittleren Fehlerellipse 2) konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen

$$\tau_{yy} x^2 - 2 \tau_{xy} x y + \tau_{xx} y^2 = \chi^2 (\tau_{xx} \tau_{yy} - \tau_{xy}^2) \dots 5)$$

oder

$$\gamma_{xx} x^2 + 2 \gamma_{xy} x y + \gamma_{yy} y^2 = \chi^2 \dots 5')$$

die die Schar der „Fehlerellipsen“ bilden. Für die durch den Parameter χ gekennzeichnete Fehlerellipse beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt P^* in ihrem Inneren liegt, daß sich also aus ihm an die betreffende Ellipse keine reellen Tangenten ziehen lassen

$$W(\gamma_{xx} x^{*2} + 2 \gamma_{xy} x^* y^* + \gamma_{yy} y^{*2} < \chi^2) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \chi^2} \dots 6)$$

Für die mittlere Fehlerellipse ($\chi = 1$) beträgt diese Wahrscheinlichkeit 0.39347.

Es ist lediglich eine Integrationsangelegenheit für jede einzelne Kurve irgend einer anderen Schar von geschlossenen, die wahrscheinlichste Punktlage P umgebenden und — was übrigens nicht wesentlich ist — einander nicht schneidenden Kurven³⁾ anzugeben, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß P^* in ihrem Inneren liegt. In gewissem Grade läßt sich also die Genauigkeit der Lagebestimmung eines Punktes auch durch andere Kurvenscharen (z. B. die Schar der den wahrscheinlichsten Ort umgebenden konzentrischen Kreise oder auch Scharen von konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Rechtecken) kennzeichnen⁴⁾. Die Ellipsen der Schar 5) zeichnen sich aber vor allen anderen Scharen von Kurven schon dadurch aus, daß jede einzelne der Schar Ort konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Die von Kurven konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte eingeschlossenen Flächen besitzen unter allen Flächen, für die die Wahrscheinlichkeit den Punkt P^* zu enthalten die gleiche ist, den kleinsten Flächeninhalt.

Es liegt nun die Frage nahe, ob es möglich ist, in einer analogen, willkürfreien Weise wie die Genauigkeit der Lagenbestimmung von Punkten auch die Genauigkeit der Lagebestimmung einer Geraden in der Ebene zu kennzeichnen. Da springt gleich der Unterschied in die Augen, daß es schlechtweg nicht möglich ist, von der Wahrscheinlichkeitsdichte einer Geraden zu sprechen. Es steht uns kein so natürliches Maß für eine Menge durch kontinuierliche Verschiebung in einander überführbarer Geraden zur Verfügung, wie es die Fläche für eine kontinuierliche Punktmenge ist. Wir können aber zu einem solchen Maße gelangen, wenn wir die Geraden der Ebene auf irgend eine eindeutige Weise durch die Punkte der Ebene abbilden. Dann bildet die Fläche der Bildpunkte ein Maß für die Menge der Geraden, das aber, da es ∞^8 eineindeutige Abbildungen der Mannigfaltigkeit der Geraden durch die Mannigfaltigkeit der Punkte gibt (Korrelationen), durchaus willkürlich ist.

³⁾ Unter geschlossener Kurve wird hiebei jeder beliebige, sich selbst nicht schneidende geschlossene Linienzug verstanden, ohne Rücksicht darauf, ob er Ecken enthält oder nicht.

⁴⁾ Fragen der gekennzeichneten Art wurden von Ch. M. Schols behandelt. „Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace.“ Annales de l'école polytechnique de Delft. Tome II. 1886. S. 123—178.

Man kann eine Gerade g durch ein Paar geordneter Parameter (U, V) festlegen. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer kontinuierlichen Geradenmenge hat einen Sinn, wenn es möglich ist, auf Grund der vorliegenden Angaben oder Annahme die Verteilung des durch die Merkmale U und V gekennzeichneten zweidimensionalen Kollektivs oder die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(U, V)$ des Merkmalpunktes $G(U, V)$ (Bildpunktes) in der UV -Ebene, der „Merkmalebene“, zumindest innerhalb des in Betracht kommenden Gebietes zu berechnen. Die kontinuierliche Geradenmenge M_g wird dann durch eine kontinuierliche Punktmenge M_G in der UV -Ebene abgebildet. Der Strahlort der Randgeraden k wird durch den Punktort K der Randpunkte abgebildet. Die Wahrscheinlichkeit der Geradenmenge M_g ergibt sich durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(U, V)$ über die Punktmenge M_G . Diese Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht bei Übergang zur Kennzeichnung der Geraden g durch andere Parameter U' , V' . Es ist

$$\begin{aligned} W(M_g) = W(M_G) &= \iint_{M_G} w(U, V) dU dV = \iint_{M_G} w[U(U', V'), V(U', V')] |J| dU' dV' \\ &= \iint_{M_G} w'(U', V') dU' dV' = W(M_{G'}) \dots \dots \dots \quad 7) \end{aligned}$$

wobei

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial U'} & \frac{\partial U}{\partial V'} \\ \frac{\partial V}{\partial U'} & \frac{\partial V}{\partial V'} \end{vmatrix} = \frac{\partial(U, V)}{\partial(U', V')}$$

die Jakobi-Donkin'sche Transformationsdeterminante bedeutet⁵⁾. Ihr Betrag gibt das Verhältnis der Flächenelemente $\frac{df}{d^2f}$, bei Übergang von der Abbildung in der $U' V'$ -Ebene zur Abbildung in der UV -Ebene und gleichzeitig das Verhältnis der Wahrscheinlichkeitsdichten $\frac{w'(U', V')}{w(U, V)}$ an.

Hat man sich einmal für die Darstellung der Geraden durch bestimmte Parameter entschieden, so gelangt man in der Bildebene zu Punktorten gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte der Bildpunkte und durch Rückabbildung zu Strahlorten gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte unter Zugrundelegung der gewählten Abbildung. Bei einer Abbildung durch Korrelation geht die Kurve n -ter Ordnung in eine Kurve n -ter Klasse, die Kurve n -ter Klasse in eine Kurve n -ter Ordnung über. Der Fehlerellipse des Bildpunktes einer Geraden wird in der Rückabbildung im allgemeinen wieder eine Kurve zweiter Ordnung entsprechen. Man wird zweckmäßiger Weise anstreben, die zur Darstellung der Geraden verwendeten Parameter von der Wahl eines willkürlichen, mit den Angaben, die im Einzelfall die Geraden bestimmen, in keinem Zusammenhang stehenden Bezugssystems unabhängig zu machen und trachten, zu einem die Genauigkeit der Lagenbestimmung kennzeichnenden System von Strahlorten zu gelangen, aus denen

⁵⁾ E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 2. Bd., 4. Aufl. Leipzig und Berlin, 1919. S. 173.

man leicht Genauigkeit der Richtungsbestimmung und Genauigkeit der Lagenbestimmung unter den Geraden gleicher Richtung entnehmen kann.

In diesen Zeilen soll folgender Fall betrachtet werden: Von zwei Punkten P_y ($y = 1, 2$) der Ebene sollen die wahrscheinlichsten Werte der Ortsvektoren \mathfrak{R}_y und die Fehlertensoren T_{yy} durch ihre Skalarkomponenten X_y, Y_y , bzw. $\tau_{x_1 x_2}, \tau_{x_1 y_2}, \tau_{y_1 y_2}$ gegeben sein, was der zeichnerischen Angabe der wahrscheinlichsten Punktlagen P_y und der sie umgebenden mittleren Fehlerellipsen entspräche. Es sei aber auch der allgemeinere Fall ins Auge gefaßt, daß zwischen den Fehlern r_1 und r_2 der beiden Punkte eine stochastische (d. i. mutmaßliche) Verbundenheit besteht⁶⁾ und es sei der sie kennzeichnende Fehleraffinor des Punktpaares

$$T_{12} = \mathfrak{E}(r_1 \cdot r_2)$$

durch seine Skalarkomponenten $\tau_{x_1 x_2}, \tau_{x_1 y_2}, \tau_{y_1 x_2}, \tau_{y_1 y_2}$ gegeben. Ein solcher Fall liegt beispielsweise vor, wenn die Lagebestimmung der Punkte P_1 und P_2 durch Vorwärtseinschneiden aus den Endpunkten einer Basis erfolgt ist und die Lage der Basisendpunkte, der Altpunkte, selbst ungenau bestimmt war. Es besteht stochastische Verbundenheit zwischen den Fehlern der Neupunkte selbst dann, wenn zwischen den Fehlern der Altpunkte kein stochastischer Zusammenhang bestanden hat⁷⁾.

Wir suchen eine der Schar der Fehlerellipsen analoge, die Genauigkeit der Lagebestimmung der Verbindungsgeraden g kennzeichnende Kurvenschar und unter den Kurven dieser Schar eine besondere, die der mittleren Fehlerellipse analog ist. Ist

$$Y = A + BX$$

die Gleichung der Verbindungsgeraden g der wahrscheinlichsten Punktlagen P_1 und P_2 („wahrscheinlichste“ oder „vorteilhafteste“ Gerade), so sind die „wahrscheinlichsten“ oder „vorteilhaftesten“ Werte der Parameter

$$A = \frac{X_2 Y_1 - X_1 Y_2}{X_2 - X_1}, \quad B = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \dots \dots \dots \quad 8)$$

und ihre Fehler α und β ergeben sich — Kleinheit der Fehler r_1 und r_2 der Punkte P_1 und P_2 vorausgesetzt — aus

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial A}{\partial X_1} x_1 + \frac{\partial A}{\partial Y_1} y_1 + \frac{\partial A}{\partial X_2} x_2 + \frac{\partial A}{\partial Y_2} y_2, \\ \beta &= \frac{\partial B}{\partial X_1} x_1 + \frac{\partial B}{\partial Y_1} y_1 + \frac{\partial B}{\partial X_2} x_2 + \frac{\partial B}{\partial Y_2} y_2. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \quad 9)$$

Die Komponenten des Fehlertensors T_G des Bildpunktes G der Verbindungsgeraden in einer $A B$ -Ebene sind nach dem Fehlerübertragungsgesetz

$$\tau_{AA} = \sum_{\rho, \sigma=1}^2 \left\{ \frac{\partial A}{\partial X_\rho} \frac{\partial A}{\partial X_\sigma} \tau_{x_\rho x_\sigma} + 2 \frac{\partial A}{\partial X_\rho} \frac{\partial A}{\partial Y_\sigma} \tau_{x_\rho y_\sigma} + \frac{\partial A}{\partial Y_\rho} \frac{\partial A}{\partial Y_\sigma} \tau_{y_\rho y_\sigma} \right\}. \quad 10)$$

⁶⁾ Betreff des Begriffes der stochastischen Verbundenheit vergl. A. A. Tschuprow, Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie. Leipzig-Berlin, 1925. S. 20 ff.

⁷⁾ A. Basch, Fehlertensoren, Fehleraffinoren und allgemeine Fehlerübertragungsgesetze. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 138. Bd., Abt. IIa, 1929, S. 125—168. — Vektorische Fehlertheorie und geodätische Fehlerübertragung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 9. Bd. 1929, S. 304—305.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{AB} &= \sum_{\rho, \sigma=1}^2 \left\{ \frac{\partial A}{\partial X_\rho} \frac{\partial B}{\partial X_\sigma} \tau_{x_\rho x_\sigma} + \left(\frac{\partial A}{\partial X_\rho} \frac{\partial B}{\partial Y_\sigma} + \frac{\partial A}{\partial Y_\sigma} \frac{\partial B}{\partial X_\rho} \right) \tau_{x_\rho y_\sigma} + \frac{\partial A}{\partial Y_\rho} \frac{\partial B}{\partial Y_\sigma} \tau_{y_\rho y_\sigma} \right\} \\ \tau_{BB} &= \sum_{\rho, \sigma=1}^2 \left\{ \frac{\partial B}{\partial X_\rho} \frac{\partial B}{\partial X_\sigma} \tau_{x_\rho x_\sigma} + 2 \frac{\partial B}{\partial X_\rho} \frac{\partial B}{\partial Y_\sigma} \tau_{x_\rho y_\sigma} + \frac{\partial B}{\partial Y_\rho} \frac{\partial B}{\partial Y_\sigma} \tau_{y_\rho y_\sigma} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die in Betracht kommenden partiellen Differentialquotienten sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X_1} &= -\frac{X_2(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)^2}, & \frac{\partial A}{\partial Y_1} &= \frac{X_2}{X_2 - X_1}, \\ \frac{\partial A}{\partial X_2} &= \frac{X_1(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)^2}, & \frac{\partial A}{\partial Y_2} &= -\frac{X_1}{X_2 - X_1}, \\ \frac{\partial B}{\partial X_1} &= \frac{Y_2 - Y_1}{(X_2 - X_1)^2}, & \frac{\partial B}{\partial Y_1} &= -\frac{1}{X_2 - X_1}, \\ \frac{\partial B}{\partial X_2} &= -\frac{Y_2 - Y_1}{(X_2 - X_1)^2}, & \frac{\partial B}{\partial Y_2} &= \frac{1}{X_2 - X_1} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (11)$$

Durch zweckmäßige Wahl des Koordinatensystems läßt sich eine bedeutende Vereinfachung erzielen. Wir legen zunächst die X -Achse durch die Punkte P_1 und P_2 , so zwar, daß $X_2 > X_1$ ist. Dann ist, wenn man mit L die Entfernung dieser beiden Punkte bezeichnet,

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= Y_2 = 0, & X_2 - X_1 &= L, & A &= 0, & B &= 0, \\ \frac{\partial A}{\partial X_1} &= 0, & \frac{\partial A}{\partial Y_1} &= \frac{X_2}{L}, & \frac{\partial A}{\partial X_2} &= 0, & \frac{\partial A}{\partial Y_2} &= -\frac{X_1}{L}, \\ \frac{\partial B}{\partial X_1} &= 0, & \frac{\partial B}{\partial Y_1} &= -\frac{1}{L}, & \frac{\partial B}{\partial X_2} &= 0, & \frac{\partial B}{\partial Y_2} &= \frac{1}{L}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (12)$$

Durch Einsetzen dieser Differentialquotienten in 10) ergibt sich sodann

$$\left. \begin{aligned} \tau_{AA} &= \frac{1}{L^2} \left\{ \tau_{y_2 y_2} X_1^2 + 2 \tau_{y_1 y_2} X_1 X_2 + \tau_{y_1 y_1} X_2^2 \right\} \\ \tau_{AB} &= -\frac{1}{L^2} \left\{ (\tau_{y_2 y_2} - \tau_{y_1 y_2}) X_1 + (\tau_{y_1 y_1} - \tau_{y_1 y_2}) X_2 \right\} \\ \tau_{BB} &= \frac{1}{L^2} \left\{ \tau_{y_1 y_1} - 2 \tau_{y_1 y_2} + \tau_{y_2 y_2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Man ersieht aus diesen Gleichungen, daß die Fehlerkomponenten in der Richtung der X -Achse, das sind die Komponenten in der Richtung von $P_1 P_2$, keinen Einfluß auf die Ungenauigkeit der Verbindungsgeraden besitzen und einzige und allein die Fehler in der Richtung der y -Achse, die „Querfehler“, von Bedeutung sind. Der Kürze der Bezeichnung wegen setzen wir im weiteren

$$\tau_{y_1 y_1} = \tau_{11}, \quad \tau_{y_1 y_2} = \tau_{12}, \quad \tau_{y_2 y_2} = \tau_{22}.$$

Zur weiteren Vereinfachung verlegen wir den Koordinatenursprung derart, daß $\tau_{AB} = 0$ wird, so daß die Parameter A und B nunmehr voneinander stochastisch unabhängig sind, oder, da ja A und $B = 0$ sind, die Koordinatenachsen in der AB -Ebene Hauptachsen der Fehlerellipsen des Bildpunktes G werden. Es ist dann

$$X_1 = -\frac{\tau_{11} - \tau_{12}}{\tau_{11} - 2\tau_{12} + \tau_{22}} L, \quad X_2 = \frac{\tau_{22} - \tau_{12}}{\tau_{11} - 2\tau_{12} + \tau_{22}} L \quad \dots \quad (14)$$

und die mittleren Fehlerquadrate der Parameter A und B sind

$$\tau_{AA} = \frac{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2}{\tau_{11} - 2\tau_{12} + \tau_{22}}, \quad \tau_{BB} = \frac{1}{L^2}(\tau_{11} - 2\tau_{12} + \tau_{22}) \dots 15)$$

Als Determinante der Streuungsmatrix eines zweidimensionalen Kollektivs mit dem Zahlenpaar (y_1, y_2) als Merkmal eines Elements ist

$$\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 \geq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Ausnahmsfall des funktionellen linearen Zusammenhangs ($y_2 = \lambda y_1$) der Fehlerkomponenten y_1 und y_2 gilt. Da das arithmetische Mittel positiver Zahlen immer größer ist als das geometrische, ist auch

$$\tau_{11} - 2\tau_{12} + \tau_{22} \geq 0.$$

Diesmal gilt aber das Ungleichheitszeichen im allgemeinen auch für den Fall des funktionellen linearen Zusammenhangs und das Gleichheitszeichen ausschließlich für den besonderen Fall, daß $y_1 = y_2$ ist.

Im Falle der Gültigkeit des verallgemeinerten Gauß'schen Gesetzes für die Verteilung der Fehler r_1 und r_2 der gegebenen Punkte P_1 und P_2 , gilt für die Verteilung der Fehler des Bildpunktes G der Verbindungsgeraden

$$w(x, \beta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_{AA}\tau_{BB}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\tau_{AA}} + \frac{\beta^2}{\tau_{BB}}\right)} \dots 16)$$

Die Ellipsen

$$\frac{x^2}{\tau_{AA}} + \frac{\beta^2}{\tau_{BB}} = x^2 \dots 17)$$

der AB -Ebene sind Orte gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte des Bildpunktes G^* der „wahren“ Verbindungsgeraden G^* . Ihnen entspricht in der XY -Ebene die Schar der Einhüllenden der Geraden $y = x + \beta X$, deren Parameter die Bedingung 17) erfüllen, das sind die Hyperbeln

$$y^2 = x^2(\tau_{AA} + \tau_{BB}X^2), \dots 18)$$

welche die gemeinsame in der Verbindungsgeraden $P_1 P_2$ liegende imaginäre Achse p besitzen, die durch

$$p^2 = \frac{\tau_{AA}}{\tau_{BB}} = \frac{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2}{(\tau_{11} - 2\tau_{12} + \tau_{22})^2} L^2 \dots 19)$$

gegeben ist. Diese Hyperbeln sollen als „Fehlerhyperbeln“ der Verbindungsgeraden bezeichnet werden. Die reelle Achse q ist von Hyperbel zu Hyperbel veränderlich und durch $q^2 = x^2 \tau_{AA}$, der Neigungswinkel φ der Asymptoten gegen $P_1 P_2$ durch $\operatorname{tg}^2 \varphi = x^2 \tau_{BB}$ gegeben.

Für $x = 1$ gelangt man durch Rückabbildung der mittleren Fehlerellipse

$$\frac{x^2}{\tau_{AA}} + \frac{\beta^2}{\tau_{BB}} = 1 \dots 20)$$

des Bildpunktes G zur „mittleren Fehlerhyperbel“ der Verbindungsgeraden

$$y^2 = \tau_{AA} + \tau_{BB}X^2, \dots 21)$$

deren Ordinaten y die mittleren Abweichungen der Punkte der Verbindungsgeraden $P_1^* P_2^*$ von der Geraden $P_1 P_2$ als Funktion der Abszisse X angeben. (Mittlere

Querfehler.) Zu dieser Gleichung kann man auch auf einfache Weise durch Berechnung des mittleren Fehlers von $Y = A + BX$ nach dem Fehlerübertragungsgesetz gelangen⁸⁾. Die mittlere Fehlerhyperbel besitzt dadurch nicht nur Bedeutung als Strahlort, sondern auch als Punktort. Ebenso wie für die mittlere Fehlerellipse bildet für die Bedeutung der mittleren Fehlerhyperbel die Gültigkeit des verallgemeinerten Gauß'schen Gesetzes keine notwendige Voraussetzung. Der Koordinatenursprung ist der genauest bestimmte Punkt der Verbindungsgeraden; er soll darum als ihr „Hauptpunkt“ bezeichnet werden. Sein mittlerer Querfehler q_1 ist durch $q_1^2 = \tau_{AA}$ gegeben, so wie der mittlere Richtungsfehler φ_1 der Verbindungsgeraden durch $\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \tau_{BB}$, also durch die Asymptotenneigung bestimmt ist. Da die Querfehler der Punkte $P_1 P_2$ der Entfernung L gegenüber klein sind, kann man auch $\varphi_1^2 = \tau_{BB}$ setzen.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Gauß-Bravais'schen Gesetzes ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gesuchte Gerade $g^* = [P_1^* P_2^*]$ eine bestimmte, durch den Parameter α gekennzeichnete Hyperbel der Schar 18) imaginär schneidet

$$W\left(\frac{\alpha^2}{\tau_{AA}} + \frac{\beta^2}{\tau_{BB}} < \alpha^2\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} \dots \dots \dots 22) \text{ } ^9)$$

Für die mittlere Fehlerhyperbel ($\alpha = 1$) beträgt diese Wahrscheinlichkeit 0.39347.

Aus den Gleichungen 14) geht hervor, daß

$$\operatorname{sign}(X_1 X_2) = \operatorname{sign}[(\tau_{12} - \tau_{11})(\tau_{22} - \tau_{12})] \dots \dots \dots 23)$$

τ_{12} liegt zwischen $-\sqrt{\tau_{11} \tau_{22}}$ und $+\sqrt{\tau_{11} \tau_{22}}$. (Vgl. Abb. 1). Wir wollen an-

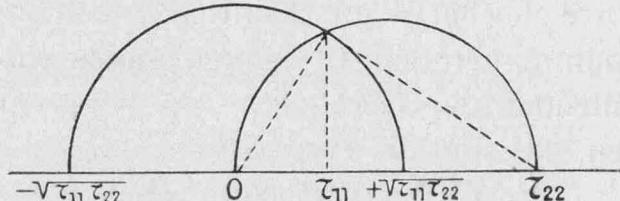


Abb. 1.

nehmen, es sei $\tau_{22} \geq \tau_{11}$. Dann folgt aus 23), daß der Hauptpunkt der Verbindungsgeraden zwischen P_1 und P_2 liegt, wenn $-\sqrt{\tau_{11} \tau_{22}} < \tau_{12} < \tau_{11}$. Ist hingegen $\tau_{11} < \tau_{12} < \tau_{22}$, so liegt der Hauptpunkt der Verbindungsgeraden außerhalb der Strecke $P_1 P_2$, und zwar auf der Seite von P_1 , bzw. allgemein auf der Seite des Punktes mit kleinerem, mittleren Querfehler. Für den Grenzfall $\tau_{12} = \tau_{11}$ ist P_1 selbst der Hauptpunkt.

Wie von vornehmerein zu erwarten war, besitzt die Verbindungsgerade für $X = X_1$ und $X = X_2$ immer die durch die Ordinaten der mittleren Fehler-

⁸⁾ R. Schumann, Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der beobachteten Koordinaten ihrer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 125. Bd., Abt. IIa, 1916, S. 1429–1466. — C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen. (Bd. XI der „Grundlehre der mathematischen Wissenschaften“, herausgegeben von R. Courant), Berlin, 1924. S. 59.

⁹⁾ A. Basch, Über Hyperbeln, bzw. Hyperboloide als Präzisionscharakteristika empirisch bestimmter linearer Funktionen. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 123. Bd., Abt. IIa, 1914. S. 1659–1678. Daselbst ist die Abhängigkeit des Parameters α von der Wahrscheinlichkeit W tabellarisch zusammengestellt.

hyperbel angezeigten mittleren Querfehler $\pm \sqrt{\tau_{11}}$, bzw. $\pm \sqrt{\tau_{22}}$. Die mittleren Querfehler der Verbindungsgeraden in den vorgegebenen Punkten stimmen mit den mittleren Querfehlern dieser Punkte überein.

Besonders durchsichtig sind zwar Sonderfälle:

1. Zwischen den Querfehlern der Punkte P_1 und P_2 besteht funktioneller linearer Zusammenhang ($y_2 = \lambda y_1$). Dann ist $\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = 0$, so daß auch $\tau_{AA} = 0$ wird. Das System der Fehlerhyperbeln degeneriert zum Strahlenbüschel, dessen Träger der Hauptpunkt der Verbindungsgeraden ist. Er liegt auf der Verbindungsstrecke $P_1 P_2$, wenn $\tau_{12} = -\sqrt{\tau_{11}\tau_{22}}$ ist und außerhalb dieser Strecke auf der Seite des Punktes mit geringerem mittleren Querfehler, wenn $\tau_{12} = +\sqrt{\tau_{11}\tau_{22}}$ ist. Dementsprechend tritt an Stelle der mittleren Fehlerhyperbel das Strahlenpaar

$$y^2 = \frac{(\sqrt{\tau_{22}} + \sqrt{\tau_{11}})^2}{L^2} X^2, \text{ bzw. } y^2 = \frac{(\sqrt{\tau_{22}} - \sqrt{\tau_{11}})^2}{L^2} X^2 \quad \dots \quad (24)$$

Ist für $\tau_{12} = +\sqrt{\tau_{11}\tau_{22}}$ außerdem noch $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau$ oder $y_2 = y_1$, so entartet das Strahlenbüschel zum Parallelstrahlenbüschel; der uneigentliche Punkt der Verbindungsgeraden wird ihr Hauptpunkt; alle Punkte der Verbindungsgeraden sind gleich genau bestimmt wie die gegebenen; an Stelle der mittleren Fehlerhyperbel tritt das Parallelgeradenpaar $y^2 = \tau^2$.

2. Die Querfehler y_1 und y_2 der beiden gegebenen Punkte seien voneinander stochastisch unabhängig ($\tau_{12} = 0$). Der Hauptpunkt H liegt dann immer auf der Verbindungsstrecke der wahrscheinlichsten Lagen der gegebenen Punkte und ist der Schwerpunkt eines Massensystems, das aus den mit den „Quergewichten“ $\gamma_1 = \frac{1}{\tau_{11}}$, bzw. $\gamma_2 = \frac{1}{\tau_{22}}$ behafteten Punkten P_1 und P_2 besteht.

Das Quergewicht des genauest bestimmten Punktes der Verbindungsgeraden, d. i. des Hauptpunktes

$$\gamma_H = \frac{1}{\tau_{AA}} = \frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{\tau_{11}\tau_{22}} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad \dots \quad (25)$$

ist gleich der Summe der Quergewichte der verbundenen Punkte.

Diesem besonderen Fall der stochastischen Unabhängigkeit der Querfehler der beiden gegebenen Punkte entspricht die Abbildung 2, in der die mittlere Fehlerhyperbel der Verbindungsgeraden aus den wahrscheinlichsten Lagen P_1 und P_2 der gegebenen Punkte und ihren mittleren Querfehlern

$$\mu_1 = P_1 Q_1' = P_1 Q_1'' = \sqrt{\tau_{11}} \text{ und } \mu_2 = P_2 Q_2' = P_2 Q_2'' = \sqrt{\tau_{22}}$$

bestimmt wird. Der Schnittpunkt $R = [(Q_1'' Q_2') (P_1 P_2)]$ teilt die Strecke $P_1 P_2$ in Abschnitte, die den mittleren Querfehlern proportional sind. Ist $P_1 Q_2''' = \mu_2$ und $S = [(Q_2''' R) (P_2 Q_2')]$, so teilt $H = [(Q_1'' S) (P_1 P_2)]$ die Strecke $P_1 P_2$ proportional den Quadraten der mittleren Fehler oder verkehrt proportional den Quergewichten, ist somit der Hauptpunkt der Verbindungsgeraden. Macht man $HU = H Q_1''' = \mu_1$ und $H Q_2^{(4)} = \mu_2$, so gibt das aus H auf $U Q_2^{(4)}$ gefällte Lot

$$HT = \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}} = \sqrt{\tau_{AA}} = q_1$$

den Betrag der halben reellen Achse $B' B''$ der mittleren Fehlerhyperbel. Macht man $Q_2' V' = Q_2^{(4)} V = Q_2^{(4)} U$ und $P_1 Q_2^{(5)} = \mu_2$, so gibt $Q_2^{(5)} V'$ die Richtung der einen Asymptote $W^1 W^2$, woraus auch die andere Asymptote $W_3 W_4$, die Brennpunkte F' und F'' sowie die Endpunkte der imaginären Achse A' und A'' gewonnen werden.

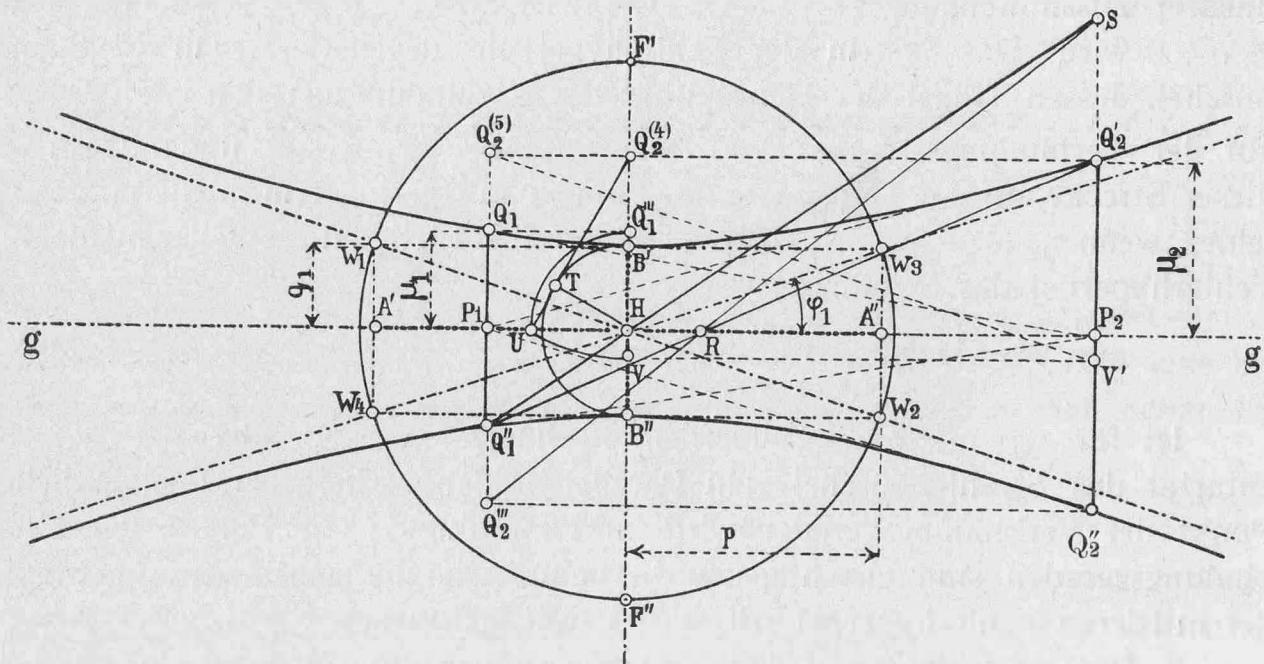


Abb. 2.

Es unterliegt keiner besonderen Schwierigkeit, diese Konstruktion auch dem allgemeineren Fall, in welchem $\tau_{12} \neq 0$ ist, anzupassen. In Abbildung 2 ist durch Verbindung von P_1 mit Q_2' und Q_2'' sowie durch Verbindung von P_2 mit Q_1' und Q_1'' , welche vier Gerade Tangenten der mittleren Fehlerhyperbel sind, der leicht nachweisbare Satz zu erkennen, daß im Fall $\tau_{12} = 0$ ist, zwischen jedem der gegebenen Punkte und dem Lot zur Verbindungsgeraden durch den anderen Punkt Polarität in bezug auf die mittlere Fehlerhyperbel als Ordnungskurve besteht. Diese Beziehung besteht auch im allgemeinen Fall ($\tau_{12} \neq 0$) zwischen je zwei Punkten der Verbindungsgeraden, deren Querfehler voneinander stochastisch unabhängig sind, und umgekehrt: die Querfehler von zwei Punkten der Verbindungsgeraden, zwischen denen die gekennzeichnete Polarität besteht, sind voneinander stochastisch unabhängig. Bei konstruktiver Behandlung bestimmter Fälle wird es zweckmäßig sein, das Verhältnis der Maßstäbe für die Entfernung und für die Querfehler (Verzerrung) derart zu wählen, daß zu stark schleifende Schnitte vermieden werden.

Wäre nicht das rechtwinklige Koordinatensystem mit $P_1 P_2$ als Richtung der X-Achse zugrundegelegt worden, so wäre ein System von Fehlerhyperbeln erhalten worden, in dem $A' A''$ (Abb. 2) der allen Hyperbeln der Schar gemeinsame imaginäre Durchmesser ist. Die Schar wäre aus der hier erhaltenen durch eine einfache affine Transformation (Schiebung parallel zu $P_1 P_2$) hervorgegangen. Bei zeichnerischer Darstellung ginge aber, insbesondere bei der sonst zweckmäßigen Verwendung einer stärkeren Verzerrung, der Vorteil der Symmetrie in bezug auf die wahrscheinlichste Verbindungsgerade verloren.

In der vorstehenden Untersuchung wurde die Genauigkeitsfrage der Verbindungsgeraden zweier Punkte vom Standpunkte der Geodäsie betrachtet. Eine andere Betrachtungsweise wäre die vom Standpunkte des geometrischen Zeichnens. Hier hat es eine gewisse Berechtigung anzunehmen, daß für die Verteilungen der senkrechten Abweichungen der Verbindungsgeraden von den zu verbindenden Punkten das Gauß'sche Gesetz gilt. Man gelangt auf Grund dieser Annahme zu einem System konfokaler Mittelpunktskegelschnitte als Fehlerkurven, innerhalb dessen unter gewöhnlichen Verhältnissen nur die Hyperbeln in Betracht kommen¹⁰⁾.

Ein dritter Standpunkt wäre der, daß die in ihrer Genauigkeit zu kennzeichnende Gerade ein lineares Zusammenhangsgesetz zweier Größen darstellt, das aus zwei beobachteten Zahlenpaaren dieser Größen zu ermitteln ist, die jedes durch einen Punkt zur Darstellung gebracht werden. Was die Genauigkeitskennzeichnung anbetrifft, ergibt sich das gleiche Resultat wie im Fall einer Geraden, die ein lineares Zusammenhangsgesetz zweier Größen darstellt, das bei Vorliegen von mehr als zwei Beobachtungspaaren durch Ausgleichung bestimmt wurde. Sieht man nur die eine der beiden Größen (in der graphischen Darstellung nur die eine der beiden Koordinaten) als fehlerhaft beobachtet an, so gelangt man zu einer Schar von Hyperbeln als Genauigkeitskennzeichen, die einen gemeinsamen imaginären Durchmesser besitzen. Betreffs der jeder einzelnen dieser Hyperbeln zugeordneten Wahrscheinlichkeit besteht die vollständige Analogie mit dem in der vorliegenden Untersuchung behandelten Fall¹¹⁾. Sieht man aber beide Größen als fehlerhaft beobachtet an, macht aber die immerhin noch besondere Voraussetzung, daß die zu den die einzelnen Beobachtungspaare darstellenden Punkten gehörigen Fehlerellipsen ähnlich und ähnlich liegend sind, so gelangt man zu einer Schar von Mittelpunktskurven zweiter Ordnung. Diese Schar wird durch die gleiche Affintransformation, welche die Fehlerellipsen der einzelnen Punkte in Kreise überführt, in ein Konfokalsystem verwandelt. Dieser Fall steht zu dem von K. Nitz behandelten, den Verhältnissen, die beim geometrischen Zeichnen in Betracht kommen, entsprechenden, in Analogie. Der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Imaginär- bzw. Reellschneidens einer einzelnen Kurve dieses Systems durch die das wahre Zusammenhangsgesetz darstellende Gerade ist ein viel komplizierterer als der Ausdruck in dem Fall, der in diesen Zeilen behandelt wurde. Er enthält Reihen nach Bessel'schen Funktionen erster Art rein imaginärer Argumente¹²⁾.

¹⁰⁾ K. Nitz, Anwendung der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Dissertation. Königsberg, 1905. — Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen. Zeitschr. f. Math. u. Physik, 53. Bd. 1906, S. 1—37. — Vgl. auch Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen. Leipzig-Berlin, 1911, S. 124. — Ferner F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. 3. Aufl., III. Bd. Präzisions- und Approximationsmathematik. Ausgearbeitet, bzw. mit Zusätzen versehen von C. H. Müller, bzw. Fr. Seyfarth. (Bd. XVI der „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“, herausgegeben von R. Courant) Berlin, 1928, S. 174.

¹¹⁾ Vgl. Fußnote⁹⁾. — Ferner: A. Basch, Über die Genauigkeitssteigerung durch Hinzutreten einer neuen Beobachtung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 2. Bd., 1922, S. 447—458. Daselbst ist auch ein Irrtum in der früher zitierten Arbeit des Verfassers berichtigt.

¹²⁾ A. Basch, Über Ausgleichsgerade und ihre Genauigkeitskennzeichen. Sitzungsberichte der Akad. Wien, 132. Bd., Abt. IIa, 1923, S. 17—44.

Bildpolygonierung bei gleichmäßiger Nadirdistanz und Geländeneigung.

Von Professor Dr. A. Buchholz, Riga.

Jedes Element eines sog. Rautenzuges enthält bekanntlich drei „Polygonpunkte“ P_{i-1} , P_i , P_{i+1} , in denen Richtungen nach den benachbarten Polygonpunkten und nach zwei „Hilfspunkten“ H'_i und H''_i gemessen werden (Abb. 1). Die Polygonpunkte in ihrer Gesamtheit bilden einen Polygonzug, dessen Brechungswinkel durch unmittelbare Messung unabhängig voneinander bestimmt werden, während jede folgende Polygonseite aus der vorhergehenden und den entsprechenden Winkeln abgeleitet wird.

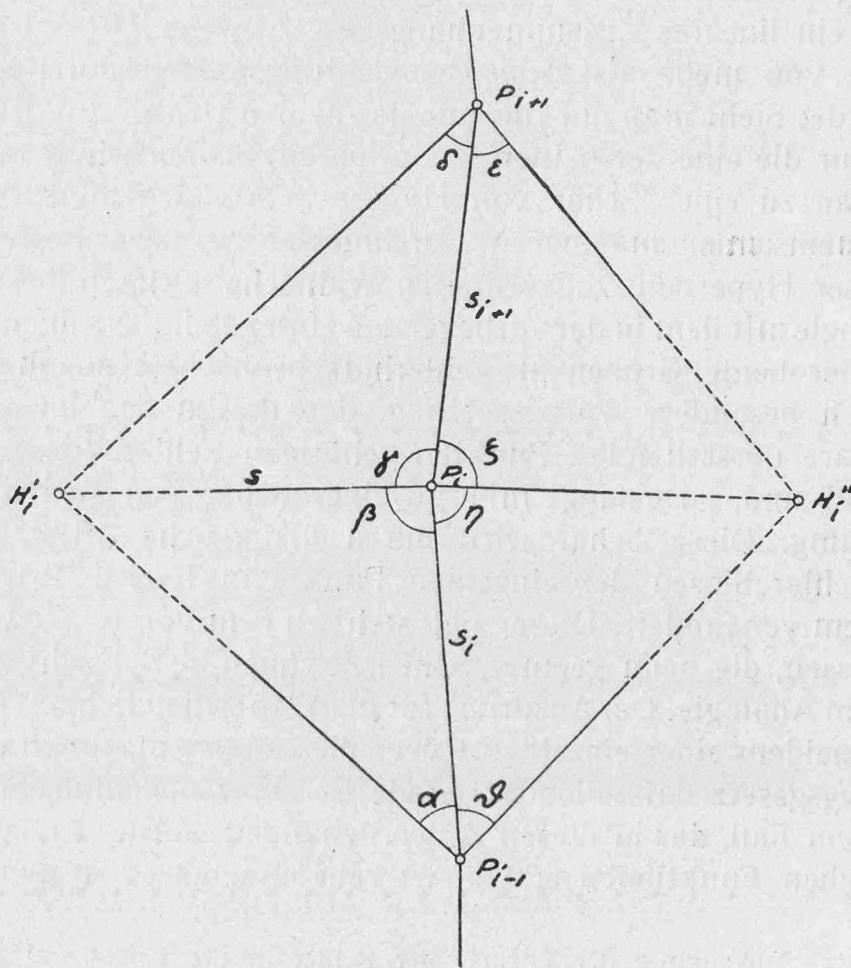


Abb. 1.

Sind in einem Element des Rautenzugs die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \vartheta$ fehlerfrei gegeben, so erfüllen sie die Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \beta + \gamma + \zeta + \eta &= 360^\circ \\ \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin(\epsilon + \zeta)} \cdot \frac{\sin(\eta + \vartheta)}{\sin \vartheta} &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (1)$$

Das diesen Winkeln entsprechende Verhältnis der Polygonseiten s_i und s_{i+1} ist

$$v = \frac{s_{i+1}}{s_i} = \frac{\sin \alpha \sin (\gamma + \delta)}{\sin (\alpha + \beta) \sin \delta} \dots \dots \dots \dots \quad 2)$$

In bezug auf den Polygonpunkt P_i und die Polygonseite $P_{i-1} P_i$ ist die Lage des Hilfspunktes H_i' durch den Winkel β und den Abstand $P_i H_i'$

$$s = s_i \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \dots \dots \dots \dots \quad 3)$$

bestimmt.

Erfahren die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unendlich kleine Veränderungen $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta$, so verändert sich dementsprechend v um den Betrag

$$d v = v \{ [\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + \beta)] d\alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) d\beta + \\ + \operatorname{ctg} (\gamma + \delta) d\gamma - [\operatorname{ctg} \delta - \operatorname{ctg} (\gamma + \delta)] d\delta \} \dots \dots \dots \quad 4)$$

Ferner verschiebt sich der Hilfspunkt H_i' in der Richtung $P_i H_i'$ um

$$d s = s_i \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \{ [\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + \beta)] d\alpha - \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) d\beta \} \dots \dots \dots \quad 5)$$

während die entsprechende Querverschiebung

$$d l = s d\beta = s_i \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} d\beta \dots \dots \dots \dots \quad 6)$$

ist.

Im folgenden wird nun stets vorausgesetzt, daß die Elemente des Rautenzugs nicht nur annähernd, sondern tatsächlich Rauten sind. Dann weist der Polygonzug geradlinige Form auf. Ferner ist

$$\left. \begin{array}{l} v = 1 \\ \beta = \gamma = \zeta = \eta = 90^\circ \\ \alpha = \delta = \varepsilon = \vartheta = \lambda \end{array} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 7)$$

wobei λ ein beliebiger spitzer Winkel sein mag.

Unter solchen Voraussetzungen gehen die Formeln 4) bis 6) über in

$$d v = \operatorname{ctg} \lambda (d\alpha - d\delta) + \operatorname{tg} \lambda (d\alpha + d\beta - d\gamma - d\delta) \dots \dots \quad 8)$$

$$d s = s_i [d\alpha + \operatorname{tg}^2 \lambda (d\alpha + d\beta)] \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 9)$$

$$d l = s_i \operatorname{tg} \lambda d\beta \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 10)$$

Man darf wohl annehmen, daß diese Formeln ihre Gültigkeit auch dann behalten, wenn die Differentiale d durch entsprechende sehr kleine endliche Veränderungen Δ ersetzt werden. Damit sind hier die durch Nadirdistanzen der Bilder und Höhenunterschiede des Geländes bewirkten Veränderungen gemeint. Jede derselben setzt sich wiederum aus zwei Summanden zusammen, von denen der eine Δ' den Einfluß der Nadirdistanzen, der andere Δ'' den Einfluß der Höhenunterschiede darstellt.

Entsprechend 8) bis 10) ist also

$$\Delta' v = \operatorname{ctg} \lambda (\Delta' \alpha - \Delta' \delta) + \operatorname{tg} \lambda (\Delta' \alpha + \Delta' \beta - \Delta' \gamma - \Delta' \delta) \quad 11a)$$

$$\Delta'' v = \operatorname{ctg} \lambda (\Delta'' \alpha - \Delta'' \delta) + \operatorname{tg} \lambda (\Delta'' \alpha + \Delta'' \beta - \Delta'' \gamma - \Delta'' \delta) \quad 11b)$$

$$\Delta' s = s_i [\Delta' \alpha + \operatorname{tg}^2 \lambda (\Delta' \alpha + \Delta' \beta)] \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 12a)$$

$$\Delta'' s = s_i [\Delta'' \alpha + \operatorname{tg}^2 \lambda (\Delta'' \alpha + \Delta'' \beta)] \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 12b)$$

$$\Delta' l = s_i \operatorname{tg} \lambda \Delta' \beta \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 13a)$$

$$\Delta'' l = s_i \operatorname{tg} \lambda \Delta'' \beta \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 13b)$$

Hat ein Bild die Nadirdistanz μ , so ist deren Einfluß auf die im Hauptpunkt vom Bildhorizont gezählte Richtung φ

$$\Delta' \varphi = -\sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\varphi \quad \dots \dots \dots \quad 14)$$

Ferner möge die Verbindungsgeraden der Geländepunkte, die dem Hauptpunkt und dem die Richtung φ bestimmenden Bildpunkt entsprechen, um den Winkel ν zur Horizontalebene geneigt sein. Der durch diesen Winkel zum Ausdruck gelangende Höhenunterschied übt auf die Richtung φ den Einfluß

$$\Delta'' \varphi = +\operatorname{tg} \nu \operatorname{tg} \mu \cos \varphi \quad \dots \dots \dots \quad 15)$$

aus.

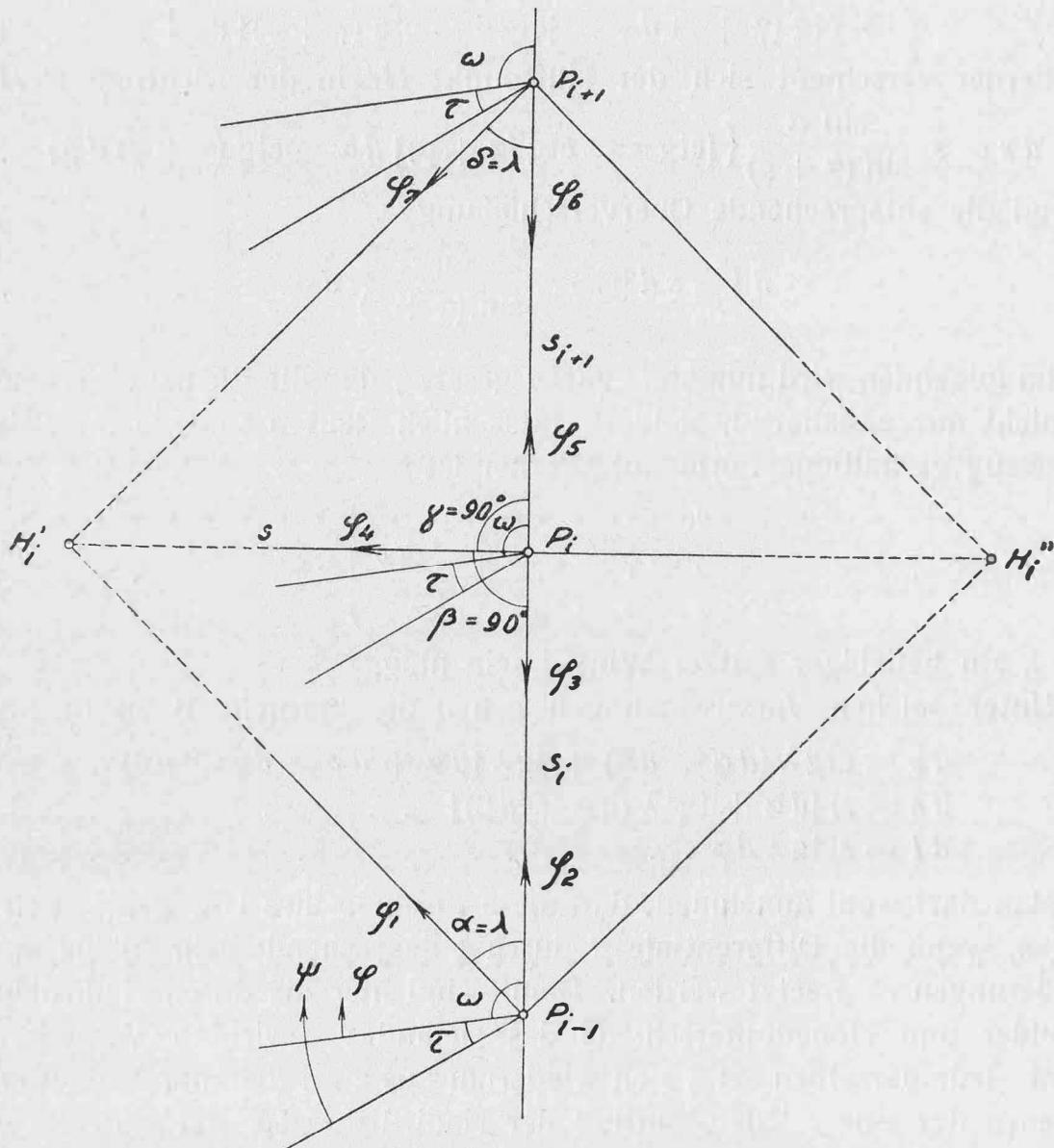


Abb. 2.

Im folgenden wird nun außer der bereits erwähnten Voraussetzung bezüglich der Form des Rautenzugs auch noch gleichmäßige Nadirdistanz sämtlicher Bilder und gleichmäßige Geländeneigung vorausgesetzt. Es wird also angenommen, daß die Bildhorizonte sämtlicher Aufnahmen mit der Richtung des Polygonzugs überall den gleichen Winkel ω einschließen (Abb. 2). Das

Gelände ist als geneigte Ebene gedacht, die in der Richtung größten Gefälles mit der Horizontalebene den Winkel θ einschließt, während ihre Horizontalrichtung in den Bildern mit deren Horizontrichtungen den Winkel τ bildet.

Unter solchen Voraussetzungen entspricht der vom Bildhorizont gezählten Richtung φ die von der Geländehorizontalen gezählte Richtung

$$\psi = \tau + \varphi \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 16)$$

Es möge in der geneigten Geländeebene EE der Punkt Ω_0 dem Bildhauptpunkt Ω entsprechen. Ferner mögen $E_0 E_0$ die durch Ω_0 verlaufende Horizontalebene, VV die der im Bilde gegebenen Richtung ψ im Gelände entsprechende Vertikalebene, und $\Omega_0 T_0$, $\Omega_0 A_0$, $\Omega_0 A'$ die Schnittlinien der erwähnten Ebenen sein (Abb. 3).

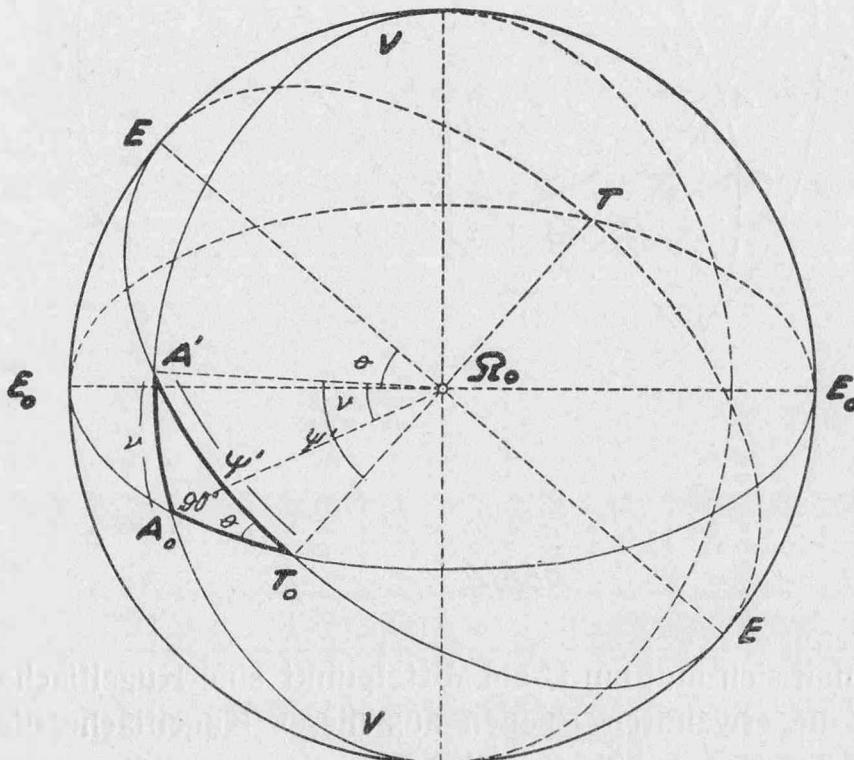


Abb. 3.

Im Schnitt dieser Ebenen mit einer um Ω_0 als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche entsteht das bei A_0 rechtwinklige sphärische Dreieck $T_0 A_0 A'$. In diesem Dreieck liegt die Kathete $A_0 A' = v$ dem Winkel θ gegenüber. Die Hypotenuse $T_0 A' = \psi'$ entspricht in der geneigten Geländeebene EE der im Bilde gegebenen Richtung ψ .

Aus dem sphärischen Dreieck $T_0 A_0 A'$ hat man

$$\sin v = \sin \psi' \sin \theta \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 17)$$

Man denke sich nun durch den Hauptpunkt Ω der Bildebene BB die horizontale Ebene $E_0 E_0$ und die dem gleichmäßig geneigten Gelände parallele Ebene EE gelegt (Abb. 4). Die Schnittlinie ΩH der Ebenen BB und $E_0 E_0$ gibt die Richtung des Bildhorizonts in der Bildebene an. Ferner möge die Gerade ΩA der von ΩH gezählten Richtung φ entsprechen. Im Schnitt der Ebenen

$E_0 E_0$ und EE ergibt sich die Gerade ΩT_0 , durch welche in diesen Ebenen die Horizontalrichtung des Geländes angezeigt wird. Schließlich mögen noch durch ΩA und ΩT_0 zu BB senkrechte Ebenen $V_a V_a$ und $V_t V_t$ gelegt sein, die mit $E_0 E_0$, EE , BB die entsprechenden Schnittlinien ΩA_0 , $\Omega A'$, ΩT ergeben.

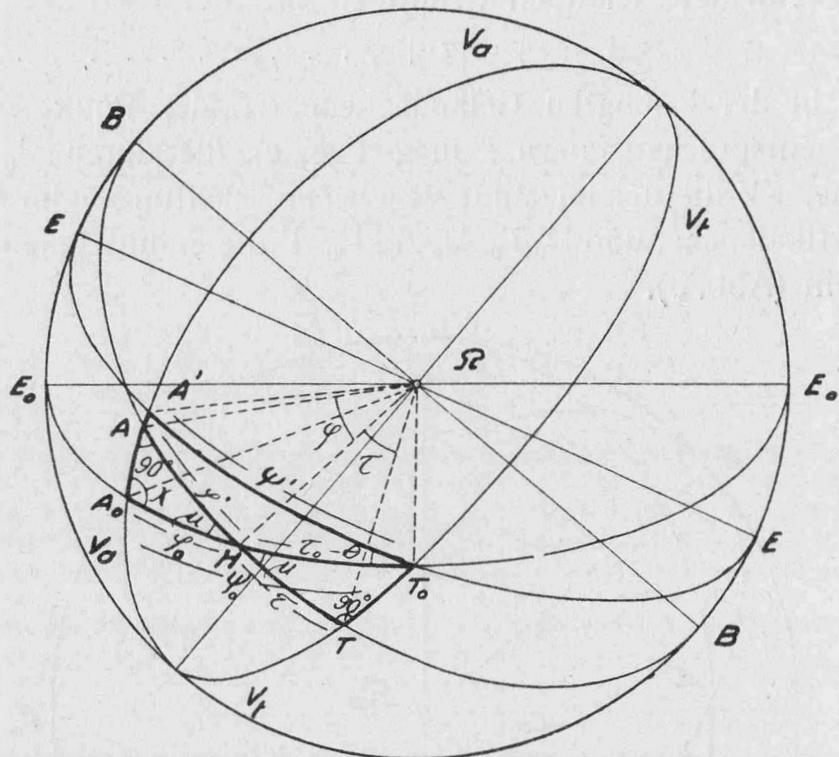


Abb. 4.

Denkt man sich nun um Ω als Mittelpunkt eine Kugelfläche beschrieben so schneiden die erwähnten Ebenen aus dieser Kugelfläche die sphärischen Dreiecke $H T T_0$, $H A A_0$, $T_0 A_0 A'$ heraus.

Die bei T und A rechtwinkligen Dreiecke $H T T_0$ und $H A A_0$ haben beide bei H den der Nadirdistanz des Bildes entsprechenden Winkel μ . Die diesem Winkel anliegenden Katheten $H T$ und $H A$ stellen die früher erwähnten Winkel τ , bzw. φ dar. Aus diesen sphärischen Dreiecken ergeben sich für deren Hypotenosen $H T_0 = \tau_0$ und $H A_0 = \varphi_0$ die Ausdrücke

$$\operatorname{ctg} \tau_0 = \operatorname{ctg} \tau \cos \mu \dots \dots \dots \dots \quad 18)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_0 = \operatorname{ctg} \varphi \cos \mu \dots \dots \dots \dots \quad 19)$$

Durch Summierung dieser Gleichungen erhält man

$$\operatorname{ctg} \tau_0 + \operatorname{ctg} \varphi_0 = (\operatorname{ctg} \tau + \operatorname{ctg} \varphi) \cos \mu \dots \dots \dots \quad 20)$$

woraus sich

$$\sin(\tau_0 + \varphi_0) = \sin(\tau + \varphi) \cos \mu \frac{\sin \tau_0 \sin \varphi_0}{\sin \tau \sin \varphi} \dots \dots \quad 21)$$

ableiten lässt.

Hier ist $(\tau + \varphi) = \psi$. Dementsprechend mag auch die Bezeichnung $(\tau_0 + \varphi_0) = \psi_0$ eingeführt werden. Da μ ein kleiner Winkel ist, darf man ferner

$$\frac{\sin \tau_0}{\sin \tau} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \sim \frac{1}{\cos \mu},$$

also

$$\frac{\sin \tau_0 \sin \varphi_0}{\sin \tau \sin \varphi} \sim \frac{1}{\cos^2 \mu} \dots \dots \dots \dots \quad 22)$$

setzen. Damit geht dann 21) über in

$$\sin \psi_0 = \frac{\sin \psi}{\cos \mu} \dots \dots \dots \dots \quad 23)$$

Im sphärischen Dreieck $T_0 A_0 A'$ mit dem Winkel θ bei T_0 ist die Seite $T_0 A_0 = \tau_0 + \varphi_0 = \psi_0$. Bezeichnet man die andere dem Winkel θ anliegende Seite $T_0 A'$ mit ψ' und den derselben gegenüberliegenden Winkel mit χ , so ist

$$\operatorname{ctg} \psi' = \frac{\operatorname{ctg} \chi \sin \theta}{\sin \psi_0} + \operatorname{ctg} \psi_0 \cos \theta = \frac{\operatorname{ctg} \chi \sin \theta + \cos \psi_0 \cos \theta}{\sin \psi_0} \dots \quad 24)$$

also

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{\sin \psi_0}{\operatorname{ctg} \chi \sin \theta + \cos \psi_0 \cos \theta} \dots \dots \dots \quad 25)$$

Wie aus dem Dreieck $H A A_0$ ersichtlich, ist bei kleinem μ näherungsweise $\chi \sim 90^\circ$. Nimmt man ferner an, daß auch θ ein kleiner Winkel ist, so darf $\operatorname{ctg} \chi \sin \theta$ als kleines Glied 2. Ordnung gelten und demgemäß in 25) vernachlässigt werden. Dann geht 25) über in

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\cos \theta} \dots \dots \dots \dots \quad 26)$$

Da der Unterschied zwischen ψ' und ψ_0 nur sehr gering ist, kann man ferner $\frac{\operatorname{tg} \psi'}{\operatorname{tg} \psi_0}$ durch $\frac{\sin \psi'}{\sin \psi_0}$ ersetzen. Dann ergibt sich aus 26) und 23)

$$\sin \psi' = \frac{\sin \psi_0}{\cos \theta} = \frac{\sin \psi}{\cos \theta \cos \mu} \dots \dots \dots \quad 27)$$

und 17) geht über in

$$\sin \nu = \frac{\sin \psi \operatorname{tg} \theta}{\cos \mu} = \frac{\sin (\tau + \varphi) \operatorname{tg} \theta}{\cos \mu} \dots \dots \dots \quad 28)$$

Bei kleinen Werten von μ und θ ist ν ebenfalls genügend klein, daß man $\sin \nu \sim \operatorname{tg} \nu$ setzen darf. Damit verwandelt sich dann 28) in

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\sin (\tau + \varphi) \operatorname{tg} \theta}{\cos \mu} \dots \dots \dots \quad 29)$$

Substituiert man diesen Ausdruck in 15) und setzt man $\cos^2 \mu = 1$, so erhält man schließlich

$$\Delta'' \varphi = + \sin (\tau + \varphi) \sin \mu \operatorname{tg} \theta \cos \varphi \dots \dots \dots \quad 30)$$

Die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mögen nun als Differenzen der von den betreffenden Bildhorizonten gezählten Richtungen φ (Abb. 2) dargestellt werden:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \varphi_2 - \varphi_1 \\ \beta = \varphi_4 - \varphi_3 \\ \gamma = \varphi_5 - \varphi_4 \\ \delta = \varphi_7 - \varphi_6 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \dots \quad 31)$$

Im Hinblick auf 7) sowie die bezüglich der Nadirdistanzen gemachten Voraussetzungen sind diese Richtungen:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \omega - \lambda \\ \varphi_2 = \omega \\ \varphi_3 = \omega - 180^\circ \\ \varphi_4 = \omega - 90^\circ \\ \varphi_5 = \omega \\ \varphi_6 = \omega - 180^\circ \\ \varphi_7 = \omega + \lambda - 180^\circ \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 32)$$

Unter dem Einfluß der für alle Bilder gleichen Nadirdistanz μ verändern sich diese Richtungen gemäß 14) um die Beträge

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' \varphi_1 = - \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2(\omega - \lambda) \\ \Delta' \varphi_2 = - \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \\ \Delta' \varphi_3 = - \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \\ \Delta' \varphi_4 = + \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \\ \Delta' \varphi_5 = - \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \\ \Delta' \varphi_6 = - \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \\ \Delta' \varphi_7 = - \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2(\omega + \lambda) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 33)$$

Die entsprechenden Veränderungen der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' \alpha = - 2 \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin \lambda \cos(2\omega - \lambda) \\ \Delta' \beta = + 2 \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \\ \Delta' \gamma = - 2 \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \\ \Delta' \delta = - 2 \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin \lambda \cos(2\omega + \lambda) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 34)$$

Der Einfluß der gleichmäßigen Geländeneigung äußert sich gemäß 30) in folgenden Veränderungen der Richtungen und Winkel:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta'' \varphi_1 = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + \omega - \lambda) \cos(\omega - \lambda) \\ \Delta'' \varphi_2 = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + \omega) \cos \omega \\ \Delta'' \varphi_3 = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + \omega) \cos \omega \\ \Delta'' \varphi_4 = - \operatorname{tg} \theta \sin \mu \cos(\tau + \omega) \sin \omega \\ \Delta'' \varphi_5 = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + \omega) \cos \omega \\ \Delta'' \varphi_6 = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + \omega) \cos \omega \\ \Delta'' \varphi_7 = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + \omega + \lambda) \cos(\omega + \lambda) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 35)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \Delta'' \alpha = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin \lambda \cos(\tau + 2\omega - \lambda) \\ \Delta'' \beta = - \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + 2\omega) \\ \Delta'' \gamma = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin(\tau + 2\omega) \\ \Delta'' \delta = + \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin \lambda \cos(\tau + 2\omega + \lambda) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 36)$$

Aus 34) und 36) folgt

$$\left. \begin{aligned} \triangle' \alpha - \triangle' \delta &= -4 \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \sin^2 \lambda \\ \triangle' \alpha + \triangle' \beta - \triangle' \gamma - \triangle' \delta &= +4 \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega \cos^2 \lambda \end{aligned} \right\} \dots 37)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \triangle'' \alpha - \triangle'' \delta &= +2 \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin (\tau + 2\omega) \sin^2 \lambda \\ \triangle'' \alpha + \triangle'' \beta - \triangle'' \gamma - \triangle'' \delta &= -2 \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin (\tau + 2\omega) \cos^2 \lambda \end{aligned} \right\} 38)$$

Dieses in 11a) und 11b) substituiert, ergibt

$$\triangle' v = -4 \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\omega (\operatorname{ctg} \lambda \sin^2 \lambda - \operatorname{tg} \lambda \cos^2 \lambda) = 0 \dots 39a)$$

$$\triangle'' v = +2 \operatorname{tg} \theta \sin \mu \sin (\tau + 2\omega) (\operatorname{ctg} \lambda \sin^2 \lambda - \operatorname{tg} \lambda \cos^2 \lambda) = 0 \dots 39b)$$

Die Längenverhältnisse der Polygonseiten werden also von einer für alle Bilder, bzw. das ganze Aufnahmegerüst gleichmäßigen Nadirdistanz und Geländeneigung — unabhängig von deren Größe und Richtung — überhaupt nicht berührt. Was die Brechungswinkel anbelangt, so werden dieselben als Differenzen diametral entgegengesetzter Richtungen von gleichmäßiger Geländeneigung nicht beeinflußt, während die Nadirdistanzen in dieser Hinsicht überhaupt keine Rolle spielen, — unabhängig davon, ob sie für alle Bilder gleich sind oder nicht. Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß die durch gleichmäßige Nadirdistanz und Geländeneigung verursachten Winkelfehler die Erfüllung der Bedingungen 1) in keiner Weise beeinträchtigen und keinen Einfluß auf die Form des im Rautenzug enthaltenen Polygonzugs haben.

Andererseits ist es selbstverständlich, daß durch jegliche Veränderung der in den Polygonpunkten gemessenen Winkel die Form des Rautenzugs, bzw. des betreffenden Elements desselben irgendwelche Veränderung erfahren muß. Ziehen Winkelveränderungen solcher Art, von welcher hier die Rede ist, den Polygonzug nicht in Mitleidenschaft, so müssen sie also jedenfalls in den Hilfspunkten zu Tage treten.

Unter Berücksichtigung der betreffenden Formeln 34), bzw. 36) ergibt sich aus 12a) und 13a)

$$\triangle' s = -2 s_i \sin^2 \frac{\mu}{2} \operatorname{tg} \lambda \cos 2\omega \dots 40a)$$

$$\triangle' l = +2 s_i \sin^2 \frac{\mu}{2} \operatorname{tg} \lambda \sin 2\omega \dots 41a)$$

und aus 12b) und 13b)

$$\triangle'' s = +s_i \operatorname{tg} \theta \sin \mu \operatorname{tg} \lambda \cos (\tau + 2\omega) \dots 40b)$$

$$\triangle'' l = -s_i \operatorname{tg} \theta \sin \mu \operatorname{tg} \lambda \sin (\tau + 2\omega) \dots 41b)$$

Bezüglich der Vorzeichen sei bemerkt, daß positiven Werten von $\triangle' s$ und $\triangle'' s$ ein Abrücken des Hilfspunktes vom Polygonzug entspricht, während positive $\triangle' l$ und $\triangle'' l$ darauf hindeuten, daß die Verschiebung des Hilfspunktes in der Richtung von P_i nach P_{i+1} erfolgt.

Es soll nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung im wahren Ort des Hilfspunktes angenommen werden. In diesem Koordinaten- system möge die positive Abszissenachse parallel der Richtung von P_i nach

P_{i+1} verlaufen, die positive Ordinatenachse zum Polygonzug gerichtet sein (Abb. 5). Der durch gleichmäßige Nadirdistanz, bzw. Geländeneigung verschobene Hilfspunkt hat dann in diesem System die Koordinaten

$$x' = +\Delta' l, \quad y' = -\Delta' s \dots \dots \dots \quad 42a)$$

bzw.

$$x'' = +\Delta'' l, \quad y'' = -\Delta'' s \dots \dots \dots \quad 42b)$$

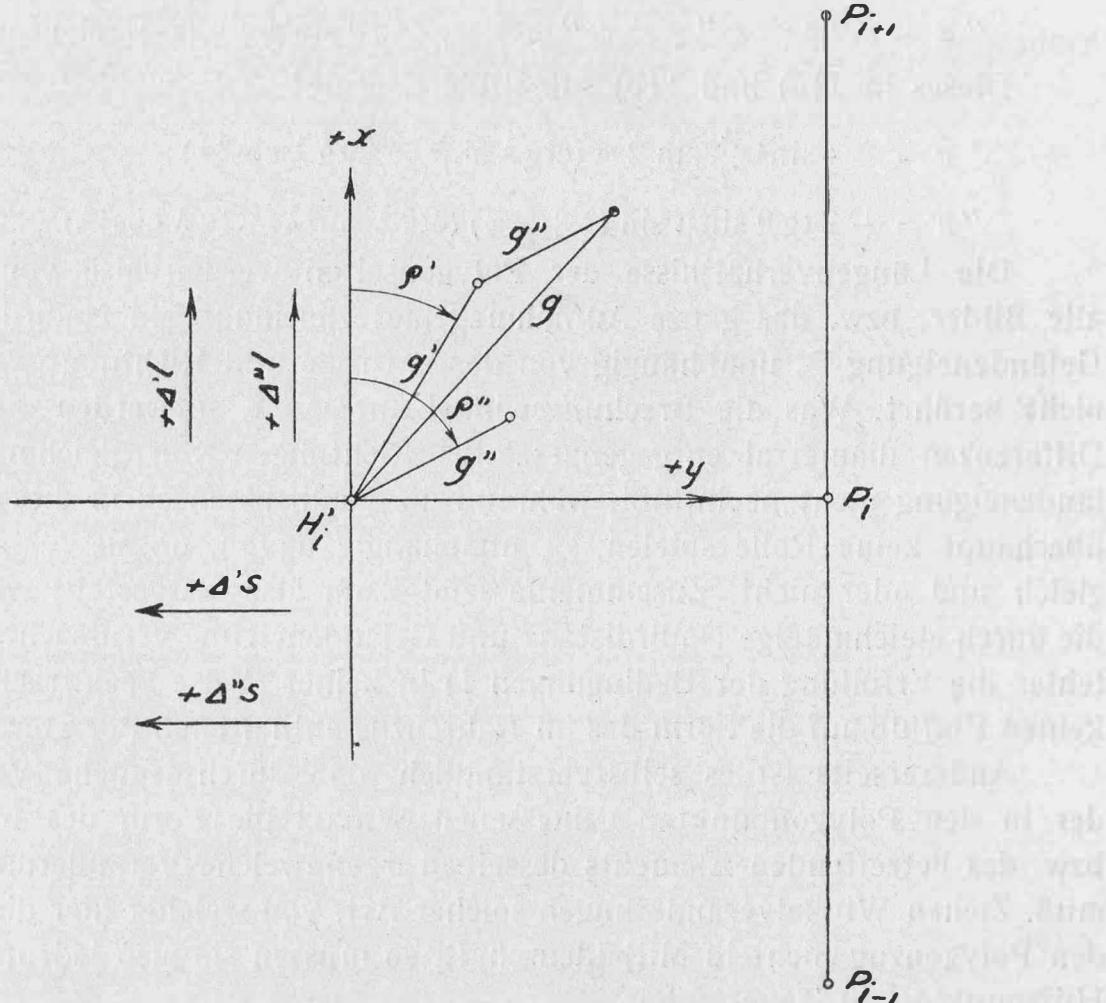


Abb. 5.

Ferner möge g' die Größe und ρ' die von der positiven Abszissenachse gezählte Richtung der Verschiebung des Hilfspunktes sein, die durch den Einfluß gleichmäßiger Nadirdistanz verursacht wird. Die entsprechenden Elemente der durch gleichmäßige Geländeneigung hervorgerufenen Verschiebung mögen g'' und ρ'' sein.

Dann ist

$$g' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{(\Delta' l)^2 + (\Delta' s)^2} = 2 s_i \sin^2 \frac{\mu}{2} \operatorname{tg} \lambda \dots \quad 43a)$$

$$\operatorname{tg} \rho' = \frac{y'}{x'} = \frac{-\Delta' s}{+\Delta' l} = \operatorname{ctg} 2 \omega \dots \dots \dots \quad 44a)$$

und

$$g'' = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2} = \sqrt{(\Delta'' l)^2 + (\Delta'' s)^2} = s_i \operatorname{tg} \theta \sin \mu \operatorname{tg} \lambda \dots \quad 43b)$$

$$\operatorname{tg} \rho'' = \frac{y''}{x''} = \frac{-\Delta'' s}{+\Delta'' l} = \operatorname{ctg} (\tau + 2 \omega) \dots \dots \dots \quad 44b)$$

In beiden Fällen ist also die Größe der Verschiebung von der Richtung der Nadirdistanz, bzw. der Geländeneigung unabhängig.

Die Formeln 43a) bis 45b) lassen sich geometrisch in der Weise deuten, daß bei konstanten s_i , λ , μ , θ und variablen ω und τ der Hilfspunkt sich auf einer Kreislinie verschiebt. Der Mittelpunkt dieser Kreislinie ist durch den wahren Ort des Hilfspunktes, der Radius g' , bzw. g'' durch die Elemente s_i , λ , μ , θ bestimmt. Dieses gilt, wenn man die unter dem Einfluß gleichmäßiger Nadirdistanz und gleichmäßiger Geländeneigung stattfindenden Verschiebungen jede für sich gesondert betrachtet.

Bei Zusammenwirken gleichmäßiger Nadirdistanz und gleichmäßiger Geländeneigung ist die Gesamtverschiebung des Hilfspunktes

$$g = \sqrt{(g')^2 + (g'')^2 + 2 g' g'' \cos(\rho'' - \rho')} \quad \quad 46)$$

Daraus ergibt sich wegen 45a) und 45b)

$$g = \sqrt{(g')^2 + (g'')^2 - 2 g' g'' \cos \tau} \quad \quad 47)$$

Im Hinblick auf 43a) und 43b) ist aus dieser Formel zu erkennen, daß g durch dieselben Elemente wie g' und g'' und außerdem durch τ bestimmt wird, dagegen von ω unabhängig ist. Es kommt also in dieser Hinsicht wohl auf die gegenseitige Orientierung der Bild- und Geländeneigung, nicht aber auf die Orientierung dieser Neigungen in bezug auf die Richtung des Polygonzugs an.

Ferner geht aus 47) hervor, daß bei konstanten s_i , λ , μ , θ und variablem τ bei $\tau = 0^\circ$ das Minimum der Gesamtverschiebung

$$g_{min} = \sqrt{(g')^2 + (g'')^2 - 2 g' g''} = g' - g'' 48)$$

eintritt, während bei $\tau = 180^\circ$ das Maximum

$$g_{max} = \sqrt{(g')^2 + (g'')^2 + 2 g' g''} = g' + g'' \dots \dots \dots \quad (49)$$

erreicht wird.

Auf Grund von 43a), 43b) und 48) kann nun untersucht werden, unter welchen Umständen eine Kompensation der Einflüsse gleichmäßiger Nadir-distanz und gleichmäßiger Geländeneigung stattfindet. Setzt man 48) gleich Null, indem man für g' und g'' die Ausdrücke 43a) und 43b) substituiert, so erhält man die Gleichung

$$g_{min} = s_i \operatorname{tg} \lambda \left(2 \sin^2 \frac{\mu}{2} - \operatorname{tg} \theta \sin \mu \right) = s_i \operatorname{tg} \lambda \sin \mu \left(\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} - \operatorname{tg} \theta \right) = 0. \quad 50)$$

Diese Gleichung wird unabhängig von s_i und λ u. a. dann erfüllt, wenn

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \operatorname{tg} \theta$$

also

ist. Zugleich muß natürlich

sein, da die Gleichung 50) nur unter dieser Bedingung gilt.

Kompensation der Einflüsse gleichmäßiger Bild- und Geländeneigung findet also dann statt, wenn diese Neigungen gleiche Richtung haben und die Nadirdistanz der Bilder doppelt so groß ist, wie die Geländeneigung in der Richtung größten Gefälles.

Dieses gilt übrigens nicht nur für die Winkel und Richtungen des Rautenzugs, sondern ganz allgemein für alle Richtungen.

Setzt man nämlich in 30)

$$\tau = 0, \theta = \frac{\mu}{2},$$

so erhält man

$$\Delta'' \varphi = + \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin 2\varphi = - \Delta' \varphi 53)$$

Eine Verschiebung des Hilfspunktes findet ferner nicht statt, wenn $\mu = 0$ ist. Hierbei handelt es sich dann allerdings nicht eigentlich um eine Kompensation der beiden Einflüsse. Vielmehr werden unter solchen Umständen die beiden Einzelverschiebungen g' und g'' jede für sich gleich Null. Es ist dieses der Sonderfall strenger Senkrechtaufnahmen, in welchem vom Einfluß der Bildneigung natürlich keine Rede sein kann. Der Hauptpunkt eines solchen Bildes ist mit dessen Nadirpunkt identisch, und von diesem Punkt ausgehende Richtungen unterliegen keinem Einfluß von Höhenunterschieden des Geländes. Dabei ist es gleichgültig, ob diese Höhenunterschiede irgendwie regelmäßigen Charakter haben oder nicht.

Die Maximumformel 49) ist insofern von Interesse, als sie Aufschluß über die Verschiebung des Hilfspunktes gibt, die bei gegebenen $s_i, \lambda, \mu, \theta$ schlimmstenfalls zu gewärtigen ist. Ähnlich wie 48) läßt sich auch diese Formel in

$$g_{max} = s_i \operatorname{tg} \lambda \sin \mu (\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} + \operatorname{tg} \theta) 54)$$

umwandeln.

Schließlich wäre noch zu bemerken, daß auch die Form des Rautenzugs einen gewissen Einfluß auf g' , g'' und deren Resultierende g hat. Wie aus den entsprechenden Formeln unmittelbar zu ersehen ist, sind in dieser Hinsicht große s_i und λ ungünstig. Es empfiehlt sich daher bei der Anlage des Dreiecksnetzes, diese Elemente nicht über das durch andere Rücksichten gebotene Mindestmaß hinausgehen zu lassen.

An Hand der Formel 54) läßt sich aufzeigen, daß bei solchen ungewollten Nadirdistanzen, mit welchen in der Praxis gerechnet werden muß, schon eine mäßige allgemeine Geländeneigung unter ungünstigen Umständen einen recht beträchtlichen Einfluß auf die Hilfspunkte einer Bildpolygonierung ausüben kann. Vorsicht in dieser Hinsicht erscheint namentlich dann geboten, wenn parallel verlaufende Rautenzüge durch gemeinsame Hilfspunkte verkoppelt werden sollen.

Als Fehlerquelle bei Bildpolygonierungen ist gleichmäßige Bild- und Geländeneigung — sowohl jede für sich einzeln als auch zusammen auftretend — insofern besonders gefährlich, als ihr Einfluß nicht durch entsprechende Widersprüche in den gemessenen Richtungen oder Winkeln zu Tage tritt. Auch terrestrisch bestimmte Anschluß- oder Kontrollpunkte bieten in dieser Hinsicht wenig Sicherheit, wenn sie in der Nähe des Polygonzugs gelegen sind. In Fällen, wo mit gleichmäßiger Geländeneigung gerechnet werden muß oder eine gewisse Wahrscheinlichkeit für gleichmäßige Nadirdistanz der Aufnahmen besteht, dürfte es sich jedenfalls empfehlen, zu Anschluß- oder Kontrollzwecken weiter vom Polygonzug entfernte Festpunkte zu benutzen.

Die neuen Katastralmappen Österreichs.

Von wirkl. Hofrat Ing. E. D e m m e r , Wien.

Gegenüber den Mappen aus der Zeit, in der der Jubilar die Lehrkanzel für niedere Geodäsie an der Technischen Hochschule in Wien übernahm, haben sich die auf Grund von Neuvermessungen hergestellten Mappen in vielen Belangen geändert. In der Öffentlichkeit und von den beh. aut. Zivilingenieuren dürfte der Übergang von den früher vorgeschriebenen Maßverhältnissen 1: 2880 und 1: 2500 und den verwandten größeren Verhältnissen auf die Maßverhältnisse 1: 1000 und 1: 2000 am meisten beachtet worden sein. Gegenüber dieser mehr äußerlichen Änderung der Katastermappen fallen Herstellung und Verwendbarkeit der neuen österreichischen Mappen mehr ins Gewicht. Die graphische Aufnahmehmethode, der Meßtisch, wurde seit Kriegsende nicht mehr angewendet. Das zahlenmäßige Aufnahmsverfahren, das in Österreich schon seit 1891 bei Stadtaufnahmen ausschließlich in Verwendung stand, hat sich bei allen Neuvermessungen durchgesetzt. Dadurch und durch die Abdruckfähigkeit der Skizzen, die auf dem Felde über die im rechtwinkligen Aufnahmsverfahren erhobenen Maßzahlen verfaßt wurden, ist der Wert der Neuvermessungsmappen und -operate für die Fortführung des Katasters, die Verfassung von Grundteilungen und umfangreicheren Parzellierungsplänen sowie für die Sicherung der zur Zeit der Neuvermessung kommissionell festgestellten Besitzgrenzen bleibend erhöht worden. Von großer Bedeutung ist dabei der Vermarkungzwang für die Grundbesitzer und die Gemeinden, der bei den Verhandlungen vor Inangriffnahme jeder Neuvermessung vertraglich niedergelegt wird. Die Vermarkung der Besitzgrenzpunkte in Verbindung mit der sorgfältigen Stabilisierung der trigonometrisch und polygonometrisch bestimmten Fixpunkte der Neuvermessung sind die beste Gewähr, daß die Einbindung weiterer geodätischer Arbeiten in neu vermessenen Gemeinden fehlerfrei und gesichert erfolgen kann und — was für die Weiterarbeit in diesen Mappen von besonderem Werte ist — daß nicht jede Grundteilung und größere Parzellierung die Neuauflnahme des ganzen Umfanges der zu teilenden Grundstücke zur Voraussetzung hat, wie das bei den Mappen der ersten Katastralaufnahme die Regel ist.

Die Verwendbarkeit der neuen österreichischen Katastermappen wurde weiter durch die Darstellung der Schichtenlinien wesentlich erhöht, welche auf Grund der in den altösterreichischen Ländern mit jeder Neuvermessung verbundenen Geländeaufnahme erfolgt. Diese, unter dem jetzigen Präsidenten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen Ing. Alfred Gromann eingeführt, wird auf stereophotogrammetrischem Wege und bei flacherem Gelände tachymetrisch bewirkt. Die Geländeaufnahme stellt im Zuge einer Neuvermessung keine wesentliche Belastung an Zeit und finanziellen Mitteln dar, da ein hinreichend dichtes Höhennetz durch die Höhen der vorhandenen Fixpunkte vorliegt. Die Schichtenlinien werden in den 1: 1000 verfaßten Mappen in der Regel mit einem Höhenabstande von 1 m gebracht. Bei stärker geneigtem Gelände und in geschlossenen Waldgebieten wird auf Abstände von 2 bis 5 und 10 m übergegangen. In verbauten Gebieten setzt die Schichtendarstellung aus. In diesen ist die Verwendbarkeit der Katastermappen für Regulierungs-

zwecke und anderweitige bautechnische Anlagen durch die Höhen der Polygonpunkte hinreichend gewährleistet, von welchen durchschnittlich 0·8 Punkte auf 1 ha fallen.

Die Neuvermessung des südlichen Burgenlandes, zur Zeit die Hauptaufgabe des staatlichen Vermessungswesens, hat aus wirtschaftlichen Gründen zum Strahlenmeßverfahren (Polarmethode) geführt, das bei der Grundbuchsvermessung in der Schweiz seit Schaffung der genauen optischen Entfernungsmesser schon durch fast zwei Jahrzehnte in Anwendung steht. Dieses Verfahren ermöglichte trotz der Doppelbestimmung jedes Besitzgrenzpunktes oder deren anderweitigen Kontrolle eine Steigerung der Arbeitsleistung am Felde um 50% der Arbeitseinheiten. Die Durchschnittsleistung beträgt für einen Vermessungsbeamten und den Tag der auswärtigen Verwendung — Sonn- und Feiertage, Reise- und Kanzleitage usw. mit eingerechnet — bis nun 6 Arbeitseinheiten, wobei deren Anzahl gleich der Summe aus den neuvermessenen Hektaren und Grundstücken zu setzen ist.

Mit dieser Durchschnittsleistung stehen die österreichischen Vermessungsbeamten mindestens in gleicher Höhe wie die Privatgeometer in der Schweiz, welchen die Grundbuchsvermessung unter entsprechender staatlicher Überwachung anvertraut ist. Dazu ist zu bemerken, daß die Arbeitseinheit bei der Neuvermessung des Burgenlandes billiger zu stehen kommt als nach dem Tarife für die Schweizer Grundbuchsvermessung. In dem aus Vermessungen der Jahre 1929 und 1930 ermittelten Durchschnittspreise für die nach obigem bestimmte Arbeitseinheit von 13 S 16 g sind sämtliche Auslagen des Bundes — Bezüge der Vermessungsingenieure während der Feld- und Kanzleiarbeit, der Kanzleibeamten und Akkordanten sowie die Auslagen für die Stabilisierung der Polygonpunkte — und jene der Gemeinden für Handlanger, Kanzlei und Materiale inbegriffen. Die Teilung dieser Auslagen zwischen Bund und Gemeinden ist durch das Verhältnis 4 : 1 gegeben, das aber je nach der Höhe des von den Gemeinden für die beigestellten Handlanger bezahlten Taglohnes schwankt. In Abweichung von dem graphischen Verfahren der Mappenherstellung bei der Schweizer Grundbuchsvermessung (Auftragung der Grenzpunkte mit dem Polarkoordinatograph) werden bei der Neuvermessung des Burgenlandes die Koordinaten jedes im Strahlenmeßverfahren bestimmten Grenzpunktes berechnet und in den im Maße 1 : 2000 verfaßten Mappen aufgetragen. Die Überprüfung dieser Auftragung erfolgt auf Grund des mitaufgetragenen Hektarnetzes (1 : 2000) mit einer Schätzplatte. Die mit dieser Platte abgelesenen Koordinaten werden in eigene Verzeichnisse eingetragen und hernach mit den ursprünglichen Koordinatenverzeichnissen verglichen. Der Zeit- und Kostenaufwand für die Koordinatenrechnung der Grenzpunkte wird durch die raschere Mappenherstellung und die Vorteile bei der Flächenberechnung aufgewogen. Da der Großteil der Grenzpunktberechnung durch Kanzleikräfte während der Sommermonate erfolgt, kann die Mappenherstellung nach dem Einrücken der Vermessungsingenieure in Angriff genommen werden und konnte das Arbeitsziel, die Neuvermessungskanzleiarbeiten einschließlich der Herstellung der Schriftoperate, wie Grundstückverzeichnisse mit Flächen und Reinerträgen, Grundbesitzbogen und Namensverzeichnisse in dem der Beendigung der Vermessungsarbeiten nächstfolgenden Jahre zum Abschluß zu bringen, bisher restlos erreicht werden. Der rechnerischen Auswertung der Vermessungs-

ergebnisse im Strahlenmeßverfahren dürfte im Hinblicke auf die Fortführung des Katasters und die Benützung des Neuvermessungsoperates durch beh. aut. Ziviltechniker gegenüber der in der Schweiz in Übung stehenden graphischen Mappenherstellung unbedingt der Vorzug zu geben sein. Es stehen ja auch in der Schweiz abdruckfähige Feldbücher zur Verfügung. Ihre Benützung für Grundteilungen und größere Parzellierungen ist aber wegen des notwendigen Zurückgehens auf die Instrumentenstandpunkte und die fallweise gegebene Notwendigkeit, die Koordinaten der Umfangspunkte doch rechnen zu müssen, ungleich zeitraubender als die Verwendung der österreichischen Neuvermessungselaborate.

Die Vermessung des südlichen Burgenlandes hat weiters zu der bemerkenswerten Änderung geführt, daß die Darstellung der Vermessungsergebnisse nicht mehr gemeindeweise, sondern über die Gemeindegrenzen hinaus, also in voll ausgezeichneten Mappenblättern erfolgt. Der Vorteil dieser blattweisen Kartierung ist zunächst in der Verbilligung der Mappenvervielfältigung gelegen, da für die sogenannten Randblätter nur mehr eine statt der bisherigen zwei bis drei Druckplatten aufzubewahren sein werden. Hiezu ist zu bemerken, daß eine Gemeinde mittleren Umfanges zwei- bis dreimal so viel Randblätter als volle Blätter hat. Weiters ist die Fortführung des Grundkatasters bezüglich der Veränderungen an den Gemeindegrenzen eine freiere und deshalb arbeit- und zeitsparendere als bei den gemeindeweisen Mappen, bei welchen ein Übergreifen auf Grenzpunkte der Nachbargemeinde mit Schwierigkeiten verbunden, wenn nicht ausgeschlossen ist, wie das beispielsweise bei den alten, mit dem Meßtisch aufgenommenen Gemeinden Österreichs der Fall ist. Eine Geländeaufnahme erfolgt bei der Neuvermessung des südlichen Burgenlandes mit Rücksicht auf die Dringlichkeit der Grundbuchsanlegung nicht. Da jedoch die Höhen aller Instrumentenstandpunkte — beim Strahlenmeßverfahren ungefähr 1 bis 2 Punkte auf ein Hektar — gerechnet werden, kann eine Schichtenzeichnung für topographische Zwecke und für allgemeine technische Trassierungen auf Grund einfacher Erkundungsmessungen vorgenommen werden.

Auch eine gebietsweise Geländeaufnahme für bautechnische Zwecke würde eine verhältnismäßig geringe Ergänzungsarbeit erfordern.

Rückblickend auf die letzten drei Jahrzehnte kann mit gutem Gewissen gesagt werden, daß Österreich, welches seinerzeit als eines der ersten Länder ein vorbildliches Vermessungswerk schuf, auch jetzt in der Durchführung seiner unumgänglich notwendigen Neuvermessungsarbeiten mit den vorgesetzten Staaten auf gleicher Höhe steht.

Zu diesem Fortschritte des bundesstaatlichen Vermessungswesens und zu dessen Arbeitserfolg hat wesentlich Hofrat Professor Dr. Doležal beigetragen durch die gründliche Vorbildung der Vermessingenieure auf den Hochschulen und ihre schon da einsetzende Erziehung zu rastloser Arbeit, durch seine langjährige Tätigkeit als Konsulent bei der Generaldirektion des Grundsteuerkatasters und nicht zuletzt durch sein intensives, zielbewußtes Wirken für die Reorganisation des Katasters und des gesamten Vermessungswesens in Österreich.

Über die Ausfüllung eines festen Rahmens durch Nadirtriangulation.

Von Geheimen Rat Professor Dr. rer. nat., Dr. d. Techn. Wissenschaften e. h.,
Dr. phil. h. c. S. Finsterwalder, München.

In einer im 7. Band des Internationalen Archivs für Photogrammetrie erschienenen Arbeit¹⁾ habe ich gezeigt, wie durch zweckmäßige Verbindung von Nadirketten mit astronomischen Bestimmungen ein weitmaschiges Netz von festen Punkten eines beflogenen Gebietes geschaffen werden kann. In dieser Arbeit soll die Ausfüllung eines solchen Netzes durch Nadirtriangulation erörtert werden. Die Betrachtungen gelten natürlich auch für den Fall, daß durch Bodentriangulation ein festes Punktnetz geschaffen ist, wobei aber vorausgesetzt wird, daß dieses Netz durch rostförmig angeordnete Triangulationsketten gebildet wird, wie etwa bei den Haupttriangulationen in Spanien, im westlichen Teil der Vereinigten Staaten von Nordamerika oder im europäischen Teil von Sowjet-Rußland. Es soll sich dann um die Überdeckung der leeren Zwischenräume des Triangulationsrostes handeln. An den Ketten selbst soll überall Anknüpfungsmöglichkeit bestehen, was bei weitmaschigen Ketten durch eingefügte Kleintriangulation, allenfalls auch wieder durch eine in ihrer Längsrichtung ausgeführte Nadirtriangulation auf dem Luftwege zu erreichen ist. Die Ausfüllung soll nun durch Nadirketten erfolgen, welche je zwei gegenüberliegende Stellen des festen Rahmens verbinden und in zwei Parallelreihen von annähernd zueinander senkrechten Richtungen verlaufen. Je zwei solcher Nadirketten, die in verschiedener Richtung verlaufen, überkreuzen sich an einer Stelle, die in beiden Nadirketten abgebildet ist. Werden nun die beiden Nadirketten unabhängig voneinander zwischen ihre Endstellen an dem festen Rahmen eingepaßt, so wird das überkreuzte Gebiet auf ihnen Verschiedenheiten in Lage, Größe und Orientierung aufweisen, die durch Ausgleichung beseitigt werden müssen. Das geschieht am einfachsten auf dem Wege einer Mittelung der maßgebenden Größen. Man wählt auf den beiden Bildern der Überkreuzungsstelle zwei entsprechende Strecken, aus denen der Unterschied der Lage der Mittelpunkte in den Richtungen beider Nadirketten, das Maßstabsverhältnis und die gegenseitige Verdrehung entnommen werden kann. Nur in Ausnahmefällen wird die einfache Mittelung eine entsprechende Ausgleichung ergeben, da die aus den Nadirketten entnommenen Bestimmungen der Lage, Größe und Orientierung zu ungleichwertig sind, je nach der Art der Anknüpfung der Nadirketten an den festen Rahmen und je nach der Entfernung der Überkreuzungsstelle von den Anknüpfungsstellen und nach der Länge der Strecke, die die Nadirkette zu überbrücken hat. Es entsteht nun die Aufgabe, die Ge-

¹⁾ Über die zweckmäßigste Verwendung der geographischen Ortsbestimmungen bei der Nadirtriangulation. Internationales Archiv für Photogrammetrie VII. Bd., 2. Hälfte, S. 37. Die Nadirtriangulation ist von Herrn Cl. Aschenbrenner mit großem Erfolg in die Praxis eingeführt worden; siehe Bildmessung und Luftbildwesen 3. Jg., S. 87, sowie die Dissertationen von J. Koppmaier, Allgem. Vermessungsnachrichten 1929, S. 33, und G. Schweizer, 1931.

wichte ausfindig zu machen, die man bei der Mittelung verwenden muß, um eine den Umständen Rechnung tragende Ausgleichung zu erhalten. Ist diese Aufgabe gelöst, so kann man für alle Überkreuzungsstellen der beiden Parallelreihen von Nadirketten Lage, Größe und Orientierung der Bilder feststellen und sie in die Karte des festen Rahmens einfügen. Zugleich bekommt man ein Maß für die Sicherheit, mit der das möglich ist. Diese wird im Innern des Rahmens geringer ausfallen, als in der Nähe desselben, aber auch von der Art der Anbindung der Nadirketten an den Rahmen abhängen.

Wir machen die Annahme, daß die zur Verwendung kommenden Nadirketten gestreckt sind, d. h. aus einer annähernd geradlinigen Folge von Dreiecken oder Rauten bestehen, ferner, daß sie homogen sind, d. h. daß ihre Elemente von annähernd gleicher Form und Größe sind und schließlich, daß diese Elemente klein im Verhältnis zur Gesamterstreckung der Kette sind. Unter diesen Voraussetzungen gelten einfache Gesetze für die Fehlerfortpflanzung in einer solchen Kette, deren Anfangselement nach Lage, Größe und Stellung gegeben sei. Wir unterscheiden eine Fehlerfortpflanzung in der Stellung und in dem Maßstabverhältnis der folgenden Elemente, für welche das gleiche Gesetz nur mit verschiedener Konstanten gilt, nämlich, daß das mittlere Fehlerquadrat des Winkels, der die Stellung, bzw. des Maßstabverhältnisses, das die Größe eines späteren Elementes definiert, der Entfernung vom festen Anfangselement proportional ist, allerdings mit verschiedener Proportionalitätskonstanten. In diesem Gesetz drückt sich die Tatsache aus, daß ein Fehler, der beim Übergang von einem Element zum Nachbarelement entsteht, sich im Rest des Zuges in gleichem Betrage auswirkt. Das gilt für die Stellung und das Maßstabsverhältnis.

Eine andere Fehlerfortpflanzung haben die Lagenfehler der Elemente. Wir unterscheiden Längsfehler in der Hauptrichtung der Kette und Querfehler senkrecht dazu. Beide Fehlerarten sind voneinander unabhängig und folgen dem Gesetz, daß das mittlere Fehlerquadrat jeweils der dritten Potenz der Entfernung des betreffenden Elementes vom Anfangselement proportional ist. In diesem Gesetz steckt die Tatsache, daß sich jeder Lagenfehler, der beim Übergang von einem Element zum Nachbarelement entsteht, in der Folge verstärktem Maße auswirkt, und zwar bei einem späteren Element entsprechend der Entfernung zwischen diesem und dem Element, bei dem der Fehler entstanden ist. Die Proportionalitätsfaktoren bei dem Lagenfehlerfortpflanzungsgesetz hängen von jenen beim Gesetz der Fortpflanzung des Stellungs- und Maßstabsfehlers ab, und zwar ist die Querfehlerkonstante ein Drittel von jener für die Stellungskonstante und die Längsfehlerkonstante ein Drittel von der Maßstabskonstanten. Die Konstanten können theoretisch aus der Form der Elemente und den Winkelfehlern der Nadirketten gerechnet werden oder auch durch Versuche bestimmt werden, wobei man Nadirketten in gut vermessenem Gelände fliegt, sie im Anschluß an eine bekannte Strecke des ersten Elementes, aber sonst ohne Zwang in sich ausgleicht und die Abweichungen des Schlußelementes nach Lage, Größe und Stellung ermittelt. Die bisher

behandelten Gesetze würden bereits genügen, um ein Überkreuzungselement, das durch zwei zueinander senkrechte Nadirketten mit je einem Element des festen Rahmens verbunden ist, festzulegen. Man verwendet bei der Mittelung der Größen, die die Lage des Überkreuzungselementes gegen die jeweiligen festen Rahmenelemente bestimmen, Gewichte, die den reziproken Werten der mittleren Fehlerquadrate proportional sind. Sind s_1 und s_2 die Entferungen des Überkreuzungselementes von den festen Rahmenelementen und sind k^2 und k'^2 die Reziproken der für die Stellungs- und Querfehler, bzw. die Maßstabs- und Längenfehler charakteristischen Konstanten, so ergeben sich die Gewichte für die Mittelung des Stellungswinkels zu $\frac{k^2}{s_1}$ und $\frac{k^2}{s_2}$, für jene des Maßstabes $\frac{k'^2}{s_1}$ und $\frac{k'^2}{s_2}$, für die Lagenkoordinate in der Längsrichtung der ersten Kette, die zugleich Querrichtung der zweiten Kette ist, zu $\frac{3k'^2}{s_1^3}$ und $\frac{3k^2}{s_2^3}$, für die Lagekoordinate in der Querrichtung der ersten Kette, die mit der Längsrichtung der zweiten Kette zusammenfällt, zu $\frac{3k^2}{s_1^3}$ und $\frac{3k'^2}{s_2^3}$.

So einfach wie in dem eben erörterten Beispiel liegen aber die Anknüpfungsverhältnisse einer Nadirkette an den festen Rahmen in der Regel nicht. Zunächst überbrückt die Nadirkette zumeist den Rahmen und kommt in einer Entfernung S von der ersten Anheftungsstelle zur zweiten am Ende der Kette. Sodann kann die Art der Anknüpfung sehr verschieden sein, z. B. an einen Punkt, oder an eine feste Richtung (ohne Maßstab), oder an einen festen Maßstab (ohne Richtung), oder an einen festen Punkt mit fester Richtung (ohne Maßstab), oder an einen Punkt mit gegebenem Maßstab (ohne Richtung), oder endlich an einen festen Punkt mit fester Richtung und gegebenem Maßstab, was das Gleiche ist wie die Anknüpfung an eine feste Strecke. Diese sechs Möglichkeiten können nun in allen Zusammenstellungen an den beiden Enden der Nadirkette auftreten, woraus sich 21 verschiedene Fälle ergeben, von welchen allerdings einige praktisch bedeutungslos sind, weil bei ihnen eine Maßstabbestimmung der Kette ausgeschlossen ist und bei ihrer Einbeziehung in die Mittelung kein Beitrag zur Lagen- und Größenbestimmung des Überkreuzungselementes, sondern höchstens ein solcher zur Stellungsbestimmung zu erwarten ist.

In all' diesen Fällen wird angenommen, daß die Nadirkette mit entsprechendem Zwang an den Enden ausgeglichen wird, ehe sie zur Festlegung eines Überkreuzungselementes, das sie mit einer Kette anderer Richtung gemeinsam hat, herangezogen wird. Durch die vorausgesetzte Erfüllung der Zwangsbedingung an den Enden wird das Gewicht des Beitrages zur Festlegung eines Überkreuzungselementes erhöht. Auch hiefür lassen sich Gesetze aufstellen, die sich durch Formeln ausdrücken und für die wichtigsten Fälle gegeben werden sollen.

1. Fall. Die Nadirkette ist zwischen zwei feste Punkte des Rahmens eingespannt. Ihre Form unterliegt keinem äußeren Zwang; ihr Maßstab wird durch die Entfernung S der festen Rahmenpunkte bestimmt. Das Gewicht

für den Stellungswinkel eines Elementes in der Entfernung s vom einen Ende ergibt sich zu: $\frac{3 k^2 S^2}{s^3 + (S - s)^3}$, das für den Maßstab zu: $\frac{3 k'^2 S^2}{s^3 + (S - s)^3}$, jenes für die Lagekoordinate in der Längsrichtung des Zuges zu: $\frac{3 k'^2 S}{s^2 (S - s)^2}$ und das für die Lagekoordinate in der Querrichtung zu: $\frac{3 k^2 S}{s^2 (S - s)^2}$. Wie man aus den Formeln erkennt, wird an den Enden der Nadirkette zwar das Gewicht der Lagekoordinaten unendlich groß, nicht aber jenes des Stellungswinkels oder des Maßstabes.

2. Fall. Die Nadirkette hat am Anfang Anschluß an eine bekannte Strecke und am Ende Anschluß an einen Punkt des festen Rahmens. Hier ist eine Ausgleichung der Nadirkette erforderlich, die in einer Streckung auf die erforderliche Länge S , verbunden mit einer Krümmung der Kette, besteht. Am einfachsten erfolgt diese Anpassung durch konforme Umbildung der zwangsläufig an die Anfangsstrecke angehängten Kette, wofür ich die Formeln in der schon erwähnten Veröffentlichung im 7. Bd. des Intern. Archivs für Photogrammetrie gegeben habe. Für die umgebildete Kette, die dem Anschlußzwang genügt, gelten dann folgende Gewichte: Für die Stellung eines Elementes in der Entfernung s vom Anfang:

$$\frac{3 k^2 S^2}{s(3S^2 - 8Ss + 6s^2)}, \text{ für den Maßstab: } \frac{3 k'^2 S^2}{s(3S^2 - 8Ss + 6s^2)},$$

für die Lage in der Längsrichtung: $\frac{3 k'^2 S^2}{s^3 (S - s)^2}$, für die in der Querrichtung:

$\frac{3 k^2 S^2}{s^3 (S - s)^2}$. Wie aus den Formeln hervorgeht, ist das Gewicht für Stellung und Maßstab beim 2. Fall in der ersten Hälfte der Kette größer als im ersten Fall, während in der zweiten Hälfte ein Zurückbleiben bemerkbar ist. Dagegen ist bei den Lagekoordinaten der 2. Fall auf der ganzen Erstreckung der Kette im Vorteil gegenüber dem ersten Fall.

3. Fall. Die Nadirkette werde am Anfang und am Ende an je eine feste Strecke des Rahmens angeschlossen. Das ist der wichtigste Fall, den man immer zu erreichen sucht. Er erfordert zwar bei der Ausgleichung die Berücksichtigung des größten Zwanges, aber das Ergebnis der Ausgleichung hat dann auch das größte Gewicht. Die Ausgleichung mittels konformer Umbildung der zwangsläufig gerechneten Kette habe ich bereits in der vorhin erwähnten Veröffentlichung behandelt. Für die Gewichte der mit Zwang ausgeglichenen Kette ergeben sich dann folgende Formeln: Gewicht für den Stellungswinkel eines Überkreuzungselementes in der Entfernung s vom Anfang des Zuges:

$$\frac{k^2 S^3}{s(S - s) [(S - s)^2 - (S - s)s + s^2]},$$

Gewicht für die Maßstabsgröße: $\frac{k'^2 S^3}{s(S - s) [(S - s)^2 - (S - s)s + s^2]}$, Gewicht

für die Lagenkoordinate in der Längsrichtung der Kette: $\frac{3 S^3 k'^2}{s^3 (S - s)^3}$, endlich
 jenes für die Lagenkoordinate in der Querrichtung: $\frac{3 k^2 S^3}{s^3 (S - s)^3}$.

Man sieht alsbald, daß die Einspannung der Nadirkette an beiden Enden an vorgegebene Strecken das Gewicht der Stellungs-, Form- und Lagegrößen allenthalben bedeutend erhöht. Die Erhöhung gegenüber Fall 1 beträgt in der Mitte der Kette bei den Stellungs- und Maßstabsgrößen ein Drittel, bei den Lagegrößen das Dreifache. Schreibt man die Formeln für die Gewichte so um, daß man $s = \sigma S$ setzt, so findet man in allen drei Fällen, daß das Gewicht der Stellungs- und Maßstabsgrößen an ähnlich gelegenen Elementen der Ketten (bei gleichem σ) der Länge S der jeweiligen Kette umgekehrt proportional sind, während die Gewichte der Lagegrößen der dritten Potenz jener Länge verkehrt proportional sind.

Wir kommen schließlich zur Betrachtung der Gewichte, die für die gemittelten Bestimmungsstücke eines Überkreuzungselementes maßgebend sind. Für die Stellungs- und Maßstabsgrößen werden sie einfach als Summen der jeweiligen Teilgewichte für die sich überkreuzenden Ketten gebildet. Hingegen ist bei der Bildung der Gewichte der ausgeglichenen Lagekoordinaten zu beachten, daß eine Lagekoordinate in der Längsrichtung der einen Kette mit einer solchen in der Querrichtung der sie überkreuzenden Kette zu verbinden ist und umgekehrt.

Untersuchen wir, um ein einfaches Beispiel zu geben, die Ausfüllung eines rechteckigen festen Rahmens mit den Seitenlängen $2a$ und $2b$ und legen wir die Überkreuzungsstelle durch die Lagekoordinaten x und y parallel zu den Rechteckseiten des Rahmens fest, wobei sie in der Mitte des Rechteckes zu Null angenommen sind, so drückt sich die Verteilung der Stellungsgewichte der Kreuzungsstelle nach der Ausgleichung im ersten Falle, d. h. bei Anknüpfung der Nadirketten an gegenüberliegende Punkte des Rahmens, folgendermaßen aus:

$$G_s = \frac{3 k^2 \cdot 4 a^2}{(a - x)^3 + (a + x)^3} + \frac{3 k^2 \cdot 4 b^2}{(b - y)^3 + (b + y)^3} = 12 k^2 \left[\frac{a}{a^2 + 3x^2} + \frac{b}{b^2 + 3y^2} \right]$$

In der Formel für das Maßstabsgewicht tritt an Stelle von k^2 die Konstante k'^2 . Die Formeln für die Gewichte G_x und G_y der gemittelten Lagekoordinaten enthalten beide Konstanten k^2 und k'^2 .

$$G_x = \frac{3 k'^2 \cdot 2 a}{(a - x)^2 (a + x)^2} + \frac{3 k^2 \cdot 2 b}{(b - y)^2 (b + y)^2} = 6 \left[\frac{a k'^2}{(a^2 - x^2)^2} + \frac{b k^2}{(b^2 - y^2)^2} \right]$$

G_y geht aus G_x durch gegenseitige Vertauschung von x mit y , a mit b und k' mit k hervor. Stellungs- und Maßstabs gewicht erreichen einen Kleinstwert:

$3 k^2 \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$ in den Ecken des Rahmens; in den Mitten der Rahmenseiten wird $G_s = 12 k^2 \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{4b} \right]$ bzw. $12 k^2 \left[\frac{1}{4a} + \frac{1}{b} \right]$; der Höchstwert tritt in der Mitte des Rahmenfeldes mit $G_s = 12 k^2 \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$ auf. Die Lagegewichte

für beide Koordinaten werden längs des ganzen Rahmens, der als fehlerfrei anzusehen ist, unendlich groß. In der Mitte des Rahmenfeldes tritt der Kleinstwert: $G_x = 6 \left[\frac{k'^2}{a^3} + \frac{k^2}{b^3} \right]$ ein.

Nicht unerheblich anders ist die Verteilung der Gewichte der ausgeglichenen Bestimmungsstücke im dritten Fall, bei dem die Anknüpfung der Nadirketten an den Rahmen mittels Strecken, die nach Länge und Richtung festliegen, erfolgt. Hier sind auch schon die Gewichte von Stellung und Maßstab längs des ganzen Rahmenumfanges unendlich groß, wie aus der Formel für das Stellungsgewicht G_s hervorgeht:

$$G_s = 8 k^2 \left| \frac{a^3}{(a^2 - x^2)(a^2 + 3x^2)} + \frac{b^3}{(b^2 - y^2)(b^2 + 3y^2)} \right|.$$

In der Mitte des Rahmenfeldes ist $G_s = 8 k^2 \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$ und in den vier Punkten mit $x^2 = \frac{a^2}{3}$, $y^2 = \frac{b^2}{3}$ ist es: $6 k^2 \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$. Das Ansteigen gegen

Unendlich wird erst außerhalb dieser vier Punkte bei der Annäherung an den Rahmen wirksam. Ganz dasselbe gilt dann auch für das Gewicht der ausgeglichenen Maßstäbe; es ist im inneren Drittel des Rahmenfeldes fast unverändert. Die Lagegewichte G_x , bzw. G_y zeigen aber in diesem Fall innerhalb des Rahmenfeldes ausgesprochene Unterschiede:

$$G_x = 24 \left[\frac{a^3 k'^2}{(a^2 - x^2)^3} + \frac{b^3 k^2}{(b^2 - y^2)^3} \right].$$

Der Kleinstwert: $24 \left[\frac{k'^2}{a^3} + \frac{k^2}{b^3} \right]$ ist in der Mitte des Rahmenfeldes, aber schon in den Punkten $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$ steigert sich das Lagegewicht auf $\frac{512}{9} \left[\frac{k'^2}{a^3} + \frac{k^2}{b^3} \right]$, um dann am Rahmen selbst allenthalben unendlich zu werden.

Die genauere Untersuchung des zweiten Falles möge wegen seiner geringeren praktischen Bedeutung hier unterbleiben.

Am Schlusse sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß sich unsere Be- trachtungen ausschließlich auf die Verwendung der Nadirtriangulation zur Herstellung eines Lageplanes des aufzunehmenden Geländes beziehen. Die dabei gegebenen Gewichtsformeln sind das Ergebnis längerer Rechnungen, auf deren Wiedergabe an dieser Stelle verzichtet wird. Ihre Bedeutung greift über das Gebiet der Nadirtriangulation hinaus und kommt auch der Triangulation vom festen Boden aus zugute. In diesem Zusammenhang gedenke ich, sie an anderer Stelle zu veröffentlichen.

Die Vorteile der gegenwärtigen Organisation des bundesstaatlichen Vermessungsdienstes.

Von Ing. A. Gromann, Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien.

Als gegen Ende des vorigen Jahrhundertes die großen Vermessungsarbeiten in fast allen europäischen Ländern beendet waren, machte sich der auf allen Gebieten einsetzende technische Fortschritt auch in der Landesvermessung geltend und das Bedürfnis nach erhöhter Genauigkeit und Reichhaltigkeit der kartenbildlichen Darstellungen aller Art veranlaßte die zur Verschung der staatlichen Vermessungsgeschäfte bestimmten Institutionen, ihre Einrichtungen und Methoden zur Durchführung ihrer Aufgaben zu erneuern, bzw. zu modifizieren.

Es war dies die Zeit, in der Laussedat's Methode zur geometrischen Verwertung des Lichtbildes auch bei der Österreichischen topographischen Landesvermessung Eingang fand, die Zeit, in der die alten Aufnahmehmethoden durch genauere teils verdrängt, teils ersetzt wurden und die Meßtischgeräte der Geometer eine dementsprechende Ausgestaltung erfahren mußten.

Diese und die folgende Zeit war für das österreichische Vermessungswesen auch schon deshalb von Bedeutung, weil sich die Erkenntnis von der Notwendigkeit des Zusammenschlusses aller in Betracht kommenden staatlichen Einrichtungen aus technischen und wirtschaftlichen Gründen langsam durchzuringen begann.

Zu den Persönlichkeiten, die schon damals einer zeitgemäßen Reform den Weg bereiteten, gehörte Eduard Doležal. Es war von großem Vorteil für die Sache, daß dieser Gelehrte, der ganz in seinem Beruf aufging, dabei aber niemals den Zusammenhang mit der Praxis verlor, schon in jungen Jahren an der Wiener Technik zu wirken Gelegenheit hatte und später als Nachfolger Schell's auf eine der wichtigsten Lehrkanzeln dieser Hochschule berufen wurde, wo sich für ihn mehr als in der steirischen Hochschulstadt Leoben außerhalb seines engeren Arbeitsgebietes ein reiches Feld fachlicher und organisatorischer Tätigkeit eröffnete und wo die Voraussetzungen für ein unmittelbares Zusammenwirken mit den an der Vereinheitlichung des staatlichen Vermessungswesens interessierten Faktoren gegeben waren.

Die gemeinsamen Bemühungen der Vertreter der Hochschulen und der Berufsverbände der Beamtenchaft, die in dem Streben nach einer Zusammenfassung aller mit dem Vermessungswesen zusammenhängenden staatlichen Funktionen und der Angliederung dieses Zweiges der technischen Verwaltung an das Ressort für die technischen Angelegenheiten einig waren, waren von Erfolg gekrönt. Nachdem mit der Vollzugsanweisung der Staatsregierung vom 6. Juni 1919 die Generaldirektion des Grundsteuerkatasters mit dem Triangulierungs- und Kalkülbüro, die österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung mit dem Gradmessungsbüro, dem Staatsamt für Handel, Gewerbe, Industrie und Bauten unterstellt und am 23. Juli 1920 auch die Abteilungen des Militärgeographischen Institutes, welche die Grundlagen für die Kartenherstellung zu beschaffen hatten, mit den vorerwähnten Abteilungen unter der Leitung des Generaldirektors des Grundsteuerkatasters vereinigt worden waren,

wurde mit der Ministerialverordnung vom 12. Jänner 1921 das Bundesvermessungsamt geschaffen, das nach der Angliederung des Eichdienstes im September 1923 die Bezeichnung Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen führt.

Wenn ein Reformwerk nach rein fachlichen Gesichtspunkten aufgebaut wird, dann kann immer mit einem Erfolg gerechnet werden. Die großen Vorteile der Zusammenlegung der einzelnen geodätischen Institutionen sind aber erst beim Ausbau der geschaffenen Organisation zu Tage getreten. Durch die Vereinigung der einzelnen, für Sonderbedürfnisse verschiedener Ressorts im Laufe des vorigen Jahrhunderts aufgestellten staatlichen Einrichtungen hatte das Bundesvermessungsamt einen ansehnlichen Personalstand übernommen, der eine große Dispositionsfreiheit mit dem Fachpersonal ermöglichte. Der einseitigen Betätigung — besonders der höher qualifizierten Funktionäre — wurde dadurch ein Ziel gesetzt, auch konnten viele Beamte, die für gewisse Dienste nicht mehr über die notwendige physische Eignung verfügten, in dem neuen Amt mit dem großen Wirkungskreis und vielseitigen Verwendungsmöglichkeiten ein entsprechendes Betätigungsfeld finden.

Eben so groß waren die Vorteile, die sich aus der Vereinigung der Instrumenten- und Materialbestände sowie der Büchereien ergaben.

Eine Folge der Zusammenfassung der technischen Mittel war u. a. die Ausdehnung der Photogrammetrie auf die Katastervermessung auf Grund des Ergebnisses der Vergleichsaufnahmen in Klosterneuburg im Jahre 1923. Es ist naheliegend, daß bei den hohen Anschaffungspreisen der im heutigen Meßbildverfahren verwendeten Kartierungsgeräte nur eine Stelle mit diesen in ihrer Bauart komplizierten Instrumenten und den dazugehörigen Anlagen ausgestattet werden kann. Der geodätisch wissenschaftliche Dienst erfuhr eine Erweiterung und Vertiefung dadurch, daß zwei wissenschaftliche Einrichtungen von hervorragendem Ansehen — das ehemalige Gradmessungsbureau und die astronomisch-geodätische Abteilung des alten Militärgeographischen Institutes — mit dem Triangulierungs- und Calculbüro der Generaldirektion des Grundsteuerkatasters vereinigt wurden.

In der mehr als zehnjährigen Arbeitsperiode hat die wissenschaftliche Abteilung mit ihrem hochqualifizierten Personal nicht nur in raschem Tempo die für Österreich notwendigen Arbeiten zur Erkenntnis des bestandschließenden Referenzellipsoids dem Abschluß entgegengebracht, das Netz der Schwerestationen verdichtet und die Arbeiten für die Neuaufnahme der magnetischen Kraftverteilung im Bundesgebiet erledigt. Unter Benützung neuzeitlicher Anlagen, besonders jener für den Zeitdienst, wurde eine „Versuchsanstalt für geodätische Instrumente und Zeitmesser“ im Rahmen des technischen Versuchsdienstes eingerichtet.

Vielbeklagt waren in der Vorkriegszeit die mannigfachen Schwierigkeiten, die sich teils durch die Unstimmigkeiten in den alten Katastertriangulierungsnetzen, teils durch den Verlust oder die unsichere Lage von ursprünglich mangelhaft festgelegten Punkten ergeben.

Die Vereinheitlichung des Vermessungswesens hat besonders hier auf dem Gebiete der Fundamentalarbeiten Wandel geschaffen und die unhaltbaren Zustände beseitigt, daß auf ein und demselben Dreieckspunkt oft im gleichen Jahre kostspielige Winkelmessungen von verschiedenen Verwaltungszweigen (Kataster, Militär, Agrar-, Berg- und Forstbehörden) lediglich mit Rücksicht auf die eigenen Bedürfnisse ausgeführt wurden, der systematische Aufbau

der untergeordneten Dreieckssysteme auf das vom Bundesvermessungsamt rekonstruierten militärischen Gradmessungsnetz ist soweit vorgeschritten, daß heute bereits 37% der Fläche des Bundesgebietes mit Punkten II. Ordnung und 30% mit Punkten III. Ordnung ausgestattet sind. — Im Neuvermessungsdienst sind an Stelle der ursprünglichen Meßtischaufnahme ausschließlich zahlenmäßige Aufnahmsverfahren getreten; die Polygonalmethode, die Schnittmethode und die Polarmethode mit Hilfe der Doppelbildentfernungsmesser, deren Wahl von der Geländegestaltung abhängt.

Während in der Vorkriegszeit die Fortführungsbeamten seltener zu Arbeiten, die außerhalb ihres eigentlichen Aufgabenbereiches lagen, herangezogen wurden, sind heute die Bezirksvermessungämter mit den Erhebungen zur Erhaltung der in ihren Bezirken gelegenen Fixpunkte der Triangulierungen aller Ordnungen und des Präzisionsnivelllements betraut. Ihnen obliegt auch die Aufnahme der Veränderungen im Stande der topographischen Neuaufnahme und nach der Bundeshaushaltsverordnung alle jene Vermessungen, die von einer bundesstaatlichen Dienststelle für irgendeinen Zweck benötigt werden.

Das sind nur einige der Vorteile, die sich durch die Zusammenlegung der Vermessungsfunktionen für den Dienst und für die Allgemeinheit ergeben haben.

Im administrativen Dienst ergaben sich wesentliche Vereinfachungen und Ersparungen durch die Auflösung des Lithographischen Institutes des Grundsteuerkatasters und durch die Vereinigung seiner Agenden mit dem Kartographischen Institut, das nunmehr die gesamten kartographischen und reproduktionstechnischen Arbeiten durchzuführen hat, sowie durch die Lösung des Überwachungsdienstes der Bezirksvermessungämter von den Finanzlandesdirektionen und durch die Unterstellung des gesamten Exekutivapparates unmittelbar unter das Bundesamt, das den gesamten Geldverkehr von der Zentrale aus bestreitet.

Wie bereits im Vorjahr in einem eingehenden Berichte über die Arbeiten des Bundesvermessungsamtes innerhalb der ersten zehn Jahre seines Bestehens ausgeführt wurde, verfügt heute das Amt und seine Dienststellen über ein reichliches, vollkommen neuzeitlich ausgestattetes Instrumentarium, wodurch die Leistungen bei den Feldarbeiten erheblich gesteigert und die Kosten verminder wurden.

Der Reform des Staatsvermessungsdienstes folgte die des einschlägigen Unterrichtes an den technischen Hochschulen, eine Maßnahme, um die sich wieder Hofrat Doležal nicht hoch genug einzuschätzende Verdienste erworben hat, für welche Reform das Bundesamt schon deshalb eingetreten ist, weil die Sicherstellung eines hochqualifizierten fachlichen Beamtennachwuchses die Voraussetzung für eine erfolgreiche Weiterentwicklung des österreichischen Vermessungswesens ist.

Räumliches Rückwärtseinschneiden aus zwei Festpunkten.

Von Professor Ing. Dr. techn. A. Haerpfer, Prag.

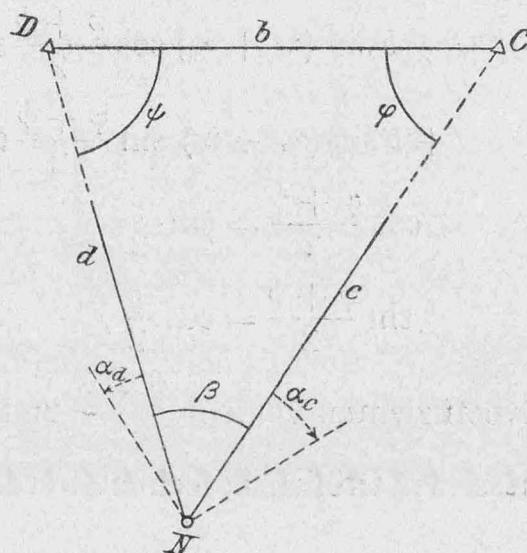
Die mehrfach behandelte Aufgabe des Rückwärtseinschneidens aus zwei nach Lage und Höhe gegebenen Festpunkten begegnet in neuerer Zeit durch die von der Luftbildmessung aufgeworfenen Fragen gesteigertem Interesse.

Der nachstehende Versuch will den Gedankengängen der bereits von Dock¹⁾ und Werner²⁾ bearbeiteten Aufgabe noch einmal nachgehen und im besonderen aufzeigen, wieweit einerseits in der Theorie Vereinfachungen zu erzielen sind und andererseits die Berücksichtigung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung den Verlauf der Rechnung beeinflußt.

I.

Näherung ohne Rücksicht auf Erdkrümmung und Strahlenbrechung.

Im Neupunkte N sind der Horizontalwinkel β zwischen den Festpunkten C und D und die Höhenwinkel α_c und α_d nach diesen gemessen. Die Höhenunterschiede zwischen N einerseits und C und D andererseits sind



$$h_n^c = c \cdot \operatorname{tg} \alpha_c + J_n - p_c$$

$$h_n^d = d \cdot \operatorname{tg} \alpha_d + J_n - p_d$$

Hierin bedeuten J_n die Instrumentenhöhe im Standpunkte N und p_c und p_d die Abstände der anvisierten Zielzeichen über den Bodenpunkten. Die Differenz der beiden h -Werte ist das bekannte Gefälle g_{cd} zwischen C und D :

$$h_n^d - h_n^c = g_{cd} = d \cdot \operatorname{tg} \alpha_d - p_d - c \cdot \operatorname{tg} \alpha_c + p_c$$

¹⁾ Dock, Rückwärtseinschneiden im Raum, Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Jg. 1910, S. 291.

²⁾ Werner, Punktbestimmung, Zeitschrift für Vermessungswesen, Jg. 1913, S. 161.

Faßt man die bekannten Größen der Kürze wegen zusammen und setzt

so ergibt sich

$$M = d \cdot \operatorname{tg} \alpha_d - c \cdot \operatorname{tg} \alpha_c.$$

Für die Summe der beiden unbekannten Winkel φ und ψ des Horizontal-dreieckes $C D N$ erhält man

$$\varphi + \psi = 180^\circ - \beta.$$

$$\text{Ferner ist } c = b \frac{\sin \psi}{\sin \beta} \text{ und } d = b \frac{\sin \varphi}{\sin \beta}$$

Die Einführung in den Ausdruck für M ergibt

$$M = \frac{b}{\sin \beta} \{ \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha_d - \sin \psi \operatorname{tg} \alpha_c \}$$

$$= \frac{b}{\sin \beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d} \{ \sin \varphi \sin \alpha_d \cos \alpha_c - \sin \psi \cos \alpha_d \sin \alpha_c \}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{2}{b} M \sin \beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d &= \sin \varphi \{ \sin (\alpha_d + \alpha_c) + \sin (\alpha_d - \alpha_c) \} - \\ &\quad - \sin \psi \{ \sin (\alpha_d + \alpha_c) - \sin (\alpha_d - \alpha_c) \} \\ &= \sin (\alpha_d + \alpha_c) (\sin \varphi - \sin \psi) + \sin (\alpha_d - \alpha_c) (\sin \varphi + \sin \psi) \end{aligned}$$

$$M \sin \beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d = b \sin (\alpha_d + \alpha_c) \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2} + \\ + b \sin (\alpha_d - \alpha_c) \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Setzt man

$$\cos \frac{\varphi + \psi}{2} = \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi + \psi}{2} = \cos \frac{\beta}{2},$$

so ergeben sich für die Koeffizienten von $\sin \frac{\psi - \varphi}{2}$ und $\cos \frac{\varphi - \psi}{2}$ Ausdrücke, die restlos aus den gemessenen Größen berechnet werden können. Nennt man sie Q und R , so ist

$$Q = b \sin (\alpha_d + \alpha_c) \sin \frac{\beta}{2} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 2)$$

Führt man noch die Bezeichnung

$$L = M \sin \beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d$$

ein, so entsteht schließlich

$$L = Q \sin \frac{\varphi - \psi}{2} + R \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \quad \dots \quad \quad 4)$$

Zur Auflösung dieser goniometrischen Gleichung erweist sich die Einführung einer Hilfsgröße H und eines Hilfswinkels λ als nützlich:

$$Q = H \cos \lambda$$

$$R = H \sin \lambda$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tg \lambda = \frac{R}{Q} \text{ und } H = \frac{Q}{\cos \lambda} = \frac{R}{\sin \lambda}}} \\ \underline{\underline{\sin \left(\frac{\varphi - \psi}{2} + \lambda \right) = \frac{L}{H}}} \end{aligned}$$

II.

Berechnung mit Rücksicht auf Erdkrümmung und Strahlenbrechung.

Legt man die auf Erdkrümmung und Strahlenbrechung erweiterte Formel für den Höhenunterschied zu Grunde:

$$\begin{aligned} h_c &= c \cdot \tg \alpha_c + J_n - p_c + \frac{c^2}{2r} (1 - k) \\ h_d &= d \cdot \tg \alpha_d + J_n - p_d + \frac{d^2}{2r} (1 - k), \end{aligned}$$

so ist leicht zu übersehen, daß diese Erweiterung lediglich die Größen M und L verändert und daß somit die Wiederholung der Rechnung im wesentlichen auf diese beiden Größen, die nunmehr mit M' und L' bezeichnet werden sollen, beschränkt bleibt. Es ist

$$\begin{aligned} M' &= g_{cd} + p_d - p_c - \frac{1 - k}{2r} (d^2 - c^2) \dots \dots \dots 5 \\ L' &= M' \sin \beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d \\ \underline{\underline{\sin \left(\frac{\varphi' - \psi'}{2} + \lambda \right) = \frac{L'}{H}}} \end{aligned}$$

1. Zahlenbeispiel.

Gegeben sind die rechtwinkligen Koordinaten x , y und die Meereshöhen H der Festpunkte:

	x	y	H
C	+ 188,611 m	+ 684,668 m	241,345 m
D	+ 611,646 „	+ 722,448 „	250,240 „
$x_d - x_c$	+ 423,035 m	$y_d - y_c$ = + 37,780 m	$g_{cd} = + 8,895$ m

Gemessen: Der Horizontalwinkel im Neupunkte N

$$\beta = 30^\circ 42' 55''$$

und die Höhenwinkel

$$\begin{aligned} \alpha_c &= 8^\circ 28' 6'' \\ \alpha_d &= 8^\circ 12' 24'' \\ \underline{\underline{\alpha_d + \alpha_c = 16^\circ 40' 30''}} \\ \alpha_d - \alpha_c &= -0^\circ 15' 42'' \end{aligned}$$

Es ergab sich

für die Instrumentenhöhe: $I_n = 1,334 \text{ m}$

für die Zielzeichenmaße: $p_c = 2,640 \text{ ,},$

$p_d = 2,600 \text{ ,},$

Nach Gleichung 1) S. 42 ist $M = +8,855 \text{ m}$

Aus der 6-stelligen logarithmischen Rechnung gingen hervor:

$$(CD) = 5^\circ 6' 12''$$

$$\log b = 2,628100$$

Mit Hilfe der Gleichungen 4) S. 42, dann 2) und 3) S. 42 erhält man:

log:	$\sin \beta$	9,708228
	$\cos \alpha_c$	9,995239
	$\cos \alpha_d$	9,995530
	$\sin \beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d$	9,698997
	M	0,947189
	L	0,646186

log:	H	1,509612	$\frac{\varphi - \psi}{2} + \lambda$	7 ⁰ 52' 18''
	$\cos \lambda$	9,999272	λ	356 ⁰ 41' 0,5''
	Q	1,508884		
	$\sin \frac{\beta}{2}$	9,422989	$\frac{\varphi - \psi}{2}$	11 ⁰ 11' 17,5''
	$\sin (\alpha_d + \alpha_c)$	9,457795	$\frac{\varphi + \psi}{2}$	74 ⁰ 38' 32,5''
	b	2,628100		
	$\sin (\alpha_d - \alpha_c)$	7,659624n	φ	85 ⁰ 49' 50''
	$\cos \frac{\beta}{2}$	9,984208	ψ	63 ⁰ 27' 15''
	R	0,271932n		
	$\operatorname{tg} \lambda$	8,763048n	β	30 ⁰ 42' 55''
	λ	356 ⁰ 41' 0,5''	Summe	180 ⁰ 00' 00''
	$\sin \lambda$	8,762319n	log:	
	H	1,509613	b	2,628100
	L	0,646186	$\sin \beta$	9,708228
	$\sin \left(\frac{\varphi - \psi}{2} + \lambda \right)$	9,136573	$\frac{b}{\sin \beta}$	2,919872
			$\sin \varphi$	9,998849
			$\sin \psi$	9,951618
			d	2,918721
			c	2,871490

II.

Die Wiederholung der Rechnung beginnt mit der Gleichung 5) S. 43

$$M' = M - \frac{1-k}{2r} (d^2 - c^2)^3$$

³⁾ Sind unmittelbar entnommen der Tabelle für trigonometrische Höhenmessung, Jordan-Eggert, II. Bd., 8. Aufl., S. 11 des Anhanges.

$$M' = + 8,855 - 0,009$$

$$M' = + 8,846$$

log: sin $\beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d$	9,698997	log:	$\frac{b}{\sin \beta}$	2,919872
M'	0,946747		$\sin \varphi'$	9,998844
L'	0,645744		$\sin \psi'$	9,951648
H	1,509613		d'	2,918716
$\sin \left(\frac{\varphi' - \psi'}{2} + \lambda \right)$	9,136131		c'	2,871520

$\frac{\varphi' - \psi'}{2} + \lambda$	7° 51' 49"
λ	356° 41' 0,5"
$\frac{\varphi' - \psi'}{2}$	11° 10' 48,5"
$\frac{\varphi' + \psi'}{2}$	74° 38' 32,5"
φ'	85° 49' 21"
ψ'	63° 27' 44"
β	30° 42' 55"
Summe	180° 00' 00"

Die Berechnung der Raumkoordinaten des Neupunktes N ergab:

$$\begin{aligned}x &= + 308,585 \text{ m} \\y &= - 49,503 \text{ ,} \\H_n &= 131,853 \text{ ,}\end{aligned}$$

Als

2. Zahlenbeispiel

wurde jenes von D o c k, diese Zeitschrift, Jg. 1910, S. 291, noch einmal berechnet.

Die Angaben lauten:

b	237,538 m
β	29° 13' 20"
$g_{cd} = M$	12,780 m
α_c	-37° 42' 40"
α_d	-28° 58' 50"
$\alpha_d + \alpha_c$	-66° 41' 30"
$\alpha_d - \alpha_c$	8° 43' 50"

log:	L	0,63526	log:	M'	1,10626
	Q	1,74060		$\sin \beta \cos \alpha_c \cos \alpha_d$	9,52873
	R	1,54268 n		L'	0,63499
	$\operatorname{tg} \lambda$	9,80208 n		H	1,81396
	λ	327° 37' 32"		$\sin \left(\frac{\varphi' - \psi'}{2} + \lambda \right)$	8,82103
	H	1,81396			
	$\sin \left(\frac{\varphi' - \psi'}{2} + \lambda \right)$	8,82130			

$\frac{\varphi - \psi}{2} + \lambda$	3° 47' 59"	$\frac{\varphi' - \psi'}{2} + \lambda$	3° 47' 50"
λ	327° 37' 32"	λ	327° 37' 32"
$\frac{\varphi - \psi}{2}$	36° 10' 27"	$\frac{\varphi' - \psi'}{2}$	36° 10' 18"
$\frac{\varphi + \psi}{2}$	75° 23' 20"	$\frac{\varphi' + \psi'}{2}$	75° 23' 20"
φ	111° 33' 47"	φ'	111° 33' 38"
ψ	39° 12' 53"	ψ'	39° 13' 2"
β	29° 13' 20"	β	29° 13' 20"
Summe	180° 00' 00"	Summe	180° 00' 00"
log c	2,48800	$c' = 307,63$ m	
log d	2,65562	$d' = 452,51$,,	

Hierfür findet D o c k a. a. O. nach dreimaliger Wiederholung seines Rechenverfahrens:

$$\begin{aligned} c' &= 307,65 \text{ m} \\ d' &= 452,55 \text{ ,} \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Werte für die Meereshöhen konnte nicht angestellt werden, da in dieser Hinsicht die D o c k schen Angaben unvollständig sind.

* * *

Meinem Assistenten, Geometer Max I t z e, danke ich für die Mitarbeit.

Zur Ausgleichung nach der Methode des größten Produktes nebst einem Beitrag zur Gewichtsverteilung.

Von Professor Dr. E. Hellebrand, Wien.

In der Mehrheit der Fälle pflegen Fehlerreihen, die aus geodätischen Beobachtungen hervorgehen, dem Gauß'schen Fehlergesetz sehr gut zu entsprechen. Gelegentlich treten allerdings auch Fehlerreihen auf, bei denen die Anzahl der kleinen Fehler gegenüber der aus dem Gauß'schen Fehlergesetz abgeleiteten Häufigkeitszahl nicht unerheblich zurückbleibt. Die unmittelbare Folge ist, daß — auch bei langen Fehlerreihen dieser Art — der mittlere Fehler m im Vergleich zum durchschnittlichen t stärker herabgedrückt erscheint und die Beziehung

$$\frac{2 m^2}{t^2} = \pi$$

des Gauß'schen Fehlergesetzes auch nicht angenähert erfüllt ist.

Solche Fehlerreihen fügen sich weit besser einem Gesetz von der Form [Literaturhinweis (1)]

$$\varphi(\varepsilon) = c \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right),$$

worin c eine Konstante, ε einen wahren und a den Höchstfehler bezeichnet.

Aus der Forderung, daß dann jeder Fehler innerhalb der Grenzen $-a$ bis $+a$ liegen muß:

$$W_{-\frac{a}{a}}^{+\frac{a}{a}}(\varepsilon) = \int_{-\frac{a}{a}}^{\frac{a}{a}} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_0^a \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1,$$

folgt

$$2c \int_0^a \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) d\varepsilon = \frac{4ac}{3} = 1,$$

$$\text{also } c = \frac{3a}{4} \text{ und } \varphi(\varepsilon) = \frac{3a}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) = \frac{3}{4a} (a^2 - \varepsilon^2).$$

Für den durchschnittlichen und mittleren Fehler geben die strengen Formeln

$$t = 2 \int_0^a \varphi(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{3}{2a} \int_0^a \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \varepsilon d\varepsilon = \frac{3a}{8},$$

$$m^2 = 2 \int_0^a \varphi(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{3}{2a} \int_0^a \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right) \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{a^2}{5}.$$

Es wird demnach der Höchstfehler $a = m \sqrt{5}$ und

$$\frac{2 m^2}{t^2} = \frac{128}{45} = 2.84,$$

was man bei Fehlerreihen der bezeichneten Art recht gut bestätigt findet.

Will man der Vollständigkeit wegen auch die Häufigkeitszahlen für das an sich einfache Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{3a}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)$$

berechnen, dann drückt man den wahren Fehler in Einheiten des mittleren Fehlers aus

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \quad \text{oder} \quad \varepsilon = m x = \frac{a}{\sqrt{5}} x, \quad d\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{5}} dx$$

und erhält als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers ε innerhalb der Grenzen $-K \cdot m$ bis $+K \cdot m$ wegen

$$W_{-K \cdot m}^{+K \cdot m}(\varepsilon) = W_{-K}^{+K}(mx) = 2W_0^K(mx)$$

den Wert

$$2 \int_0^K \frac{3}{4a} \left(1 - \frac{x^2}{5}\right) \frac{a}{\sqrt{5}} dx = \frac{3}{2\sqrt{5}} \left(K - \frac{K^3}{15}\right).$$

Stellt man die Häufigkeitszahlen H_1 dieses Fehlergesetzes jenen H_2 des Gauß'schen gegenüber, so ergibt sich für eine Reihe von 1000 Einzelfehlern folgendes Vergleichsbild:

K	H_1	H_2
0,25	167	197
0,50	330	383
0,75	484	547
1,00	626	683

K	H_1	H_2
1,25	751	789
1,50	855	866
1,75	934	919
2,00	984	955
$\sqrt{5}$	1000	975

Die Größen H_1 und H_2 sind einander gleich,

$$H_1 = H_2 = 890,95 \text{ für } K = 1,6025.$$

Am größten sind die Unterschiede zwischen H_1 und H_2 bei Fehlern, die innerhalb der Grenzen $-0,75 \cdot m$ bis $+0,75 \cdot m$ liegen.

Man kann nun die Frage aufwerfen, wie sich eine Ausgleichung im Sinne des obigen Fehlergesetzes gestaltet und ob deren Ergebnisse wesentlich abweichen von den Resultaten der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die üblicherweise auch bei Fehlerreihen obiger Art angewendet wird.

Der Grundsatz des gesuchten Ausgleichsverfahrens leitet sich ab aus dem Umstand, daß

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \left(\frac{3d\varepsilon}{4a}\right)^n (a^2 - \varepsilon_1^2)(a^2 - \varepsilon_2^2)\dots(a^2 - \varepsilon_n^2)$$

den Höchstwert erreicht, wenn das Produkt

$$P_1 = (a^2 - \varepsilon_1^2)(a^2 - \varepsilon_2^2)\dots(a^2 - \varepsilon_n^2)$$

ein Maximum wird.

Sinngemäß sind daher jene Verbesserungen v die wahrscheinlichsten, die das Produkt

$$P = (a^2 - v_1^2)(a^2 - v_2^2)\dots(a^2 - v_n^2)$$

auf den Höchstwert erheben.

Die Verwendung dieses Ausgleichsverfahrens soll an drei möglichst einfachen Beispielen gezeigt werden.

1. Ausgleichung der Dreieckswinkel mit dem Widerspruch w.

Wir haben hier

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0,$$

$$(a^2 - v_1^2) (a^2 - v_2^2) (a^2 - v_3^2) = P,$$

oder in logarithmischer Form

$$l(a^2 - v_1^2) + l(a^2 - v_2^2) + l(a^2 - v_3^2) = lP;$$

daher mit der Korrelate k :

$$\frac{1}{a^2 - v_1^2} \cdot -2v_1 - 2k = 0,$$

$$\frac{1}{a^2 - v_2^2} \cdot -2v_2 - 2k = 0,$$

$$\frac{1}{a^2 - v_3^2} \cdot -2v_3 - 2k = 0.$$

Es gilt somit für jedes v

$$2k v^2 - 2v - 2k a^2 = 0,$$

also

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{2k} \pm \sqrt{\frac{1}{4k^2} + a^2}$$

und dies gibt, in die Bedingungsgleichung eingesetzt, zunächst

$$k = \frac{3w}{9a^2 - w^2}$$

und damit

$$v = \frac{9a^2 - w^2}{6w} \pm \frac{9a^2 + w^2}{6w}.$$

Für jedes v treten also zwei Werte auf

$$v^{(1)} = \frac{3a^2}{w}, \quad v^{(2)} = -\frac{w}{3},$$

von denen der zweite, der auch der gewöhnlichen Ausgleichung entspricht, das Produkt P zu einem Maximum macht.

Für $w = a$ geben die zwei Lösungen:

$$P_1 = -(8a^2)^3, \quad P_2 = +\left(\frac{8a^2}{9}\right)^3.$$

Die brauchbare Wurzel $v = -\frac{w}{3}$ lässt sich natürlich nach dem Anblick der drei Ableitungen auch sofort anschreiben.

2. Ausgleichung der bei einer zweimaligen Messung erhaltenen gleich genauen Werte l_1 und l_2 .

Nennen wir die Unbekannte x , so wird

$$v_1 = x - l_1, \quad v_2 = x - l_2$$

und das Produkt

$$P = x^4 - 2x^3(l_1 + l_2) - x^2(2a^2 - l_1^2 - 4l_1l_2 - l_2^2) \\ + 2x(l_1 + l_2)(a^2 - l_1l_2) - a^2(l_1^2 + l_2^2) + l_1^2l_2^2 + a^4;$$

also die Ableitung

$$P' = 4x^3 - 6x^2(l_1 + l_2) - 2x(2a^2 - l_1^2 - 4l_1l_2 - l_2^2) \\ + 2(l_1 + l_2)(a^2 - l_1l_2) = 0$$

und hieraus ergeben sich die drei Wurzeln mit den Zahlenwerten der zweiten Ableitung:

$$x_1 = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad P_1'' = -4a^2 - (l_1 - l_2)^2; \\ x_{2,3} = \frac{l_1 + l_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + 4a^2}, \quad P''_{2,3} = 8a^2 + 2(l_1 - l_2)$$

Die allein brauchbare Wurzel x_1 ist vom Betrag des Höchstfehlers unabhängig; sie stimmt mit dem Ergebnis der normalen Ausgleichung überein.

3. Es liegen drei gleich genaue Messungsgrößen vor: l_1, l_2, l_3 .

Entwickelt man das Produkt P und dessen Ableitung in allgemeiner Form, so findet man, daß das gewöhnliche arithmetische Mittel keine Wurzel von $P' = 0$ ist und der praktisch brauchbare Wert der Unbekannten von dem Betrage des Höchstfehlers a abhängt.

Wegen der einfacheren Darstellung wählen wir ein Zahlenbeispiel:

$$a = 3; \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 5 \quad 1)$$

Mit $v_1 = x - l_1, v_2 = x - l_2, v_3 = x - l_3$ erhalten wir

$$P = -x^6 + 12x^5 - 19x^4 - 156x^3 + 380x^2 + 432x - 1152.$$

Aus $P' = 0$ folgt dann in allmählicher Näherung $x = 2,448$, eine Lösung, die vom Mittelwert 2 stark abweicht. Aus den zugehörigen Verbesserungen

$$v_1 = +1,448, \quad v_2 = +2,448, \quad v_3 = -2,552$$

erkennt man, daß der kleine Wert $a = 3$ höchst unwahrscheinlich ist.

$$a = 6; \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 5 \quad 2)$$

Aus $P' = -6x^5 + 60x^4 + 248x^3 - 2412x^2 - 2642x + 13392 = 0$ findet man $x = 2,154$ und $v_1 = +1,154, v_2 = +2,154, v_3 = -2,846$.

Die Unbekannte hat sich dem Mittelwert wesentlich genähert. Auch hier sind die Unterschiede zwischen den l -Werten im Vergleiche zu $a = 6$ sehr groß, die Messungen also als wenig genau zu bezeichnen.

$$a = 30; \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 5 \quad 3)$$

Aus dem zugehörigen $P' = 0$ erhält man $x = 2,007$, fast genau den erwarteten Mittelwert.

Man kann daraus schließen: Die Ergebnisse einer Ausgleichung nach dem Grundsatz

$$(a^2 - v_1^2)(a^2 - v_2^2) \dots (a^2 - v_n^2) = P_{\max}$$

nähern sich den Resultaten der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate umso mehr, je kleiner die Einzelfehler gegenüber dem Höchstfehler sind oder je genauer die Messungen ausgeführt wurden.

Der theoretisch mögliche Höchstfehler, der dem Gauß'schen Fehlergesetz zugrunde gelegt ist, erreicht bekanntlich die Grenze $\pm \infty$, wenngleich praktisch der vierfache mittlere Fehler wohl nie überschritten wird.

Nun erhält man für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlerreihe auf Grundlage des Fehlergesetzes

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{3}{4} a \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2} \right)$$

den Ausdruck

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \left(\frac{3 d \varepsilon}{4 a} \right)^n \left(1 - \frac{1}{a^2} [\varepsilon \varepsilon] + \frac{1}{a^4} [\varepsilon_i^2 \varepsilon_k^2] - \dots \right)$$

und erkennt, daß bei großen a -Werten schon das Glied mit $\frac{1}{a^4}$ verschwindend klein sein kann. Dann wäre der Höchstwert des W an den Kleinstwert von $[\varepsilon \varepsilon]$ gebunden und die Methode des größten Produktes identisch mit jener der kleinsten Quadrate.

* * *

Fragen nach der besten Gewichtsverteilung sind bei Vorhandensein bloß einer Funktion im allgemeinen nicht allzu schwer zu beantworten. Stellt man sich aber die Aufgabe, bei irgendeiner Punktbestimmung den Lagefehler bei geringstem Arbeitsaufwand auf ein Mindestmaß einzuschränken, dann kann die Lösung sehr verwickelt und ohne besondere mathematische Hilfsmittel unerreichbar sein.

Es drängt sich dann die Frage auf, ob die strengen Lösungen nicht durch Näherungen ersetzt werden könnten und ob es nicht sogar zulässig wäre, bloß Anhaltspunkte zu geben für eine Unterscheidung zwischen wichtigen, minderwichtigen und überflüssigen Bestimmungsstücken. Vom praktischen und auch vom theoretischen Standpunkt dürfte man die Frage bejahen können.

Praktisch ist es fast nie möglich, einen theoretischen Beobachtungsplan, der immer auf bestimmten Voraussetzungen aufgebaut ist, in allen Einzelheiten genau auszuführen, und theoretisch spielt es keine Rolle, wenn man von der besten Gewichtsverteilung ein wenig abgeht, da die Funktionen in der Nähe eines Extrems wenig empfindlich sind; hiezu kommt, daß die Unterschiede zwischen den Ergebnissen verschiedener Gewichtsverteilungen durch die meist hohe Gesamtbeobachtungszahl P ziemlich stark herabgedrückt werden.

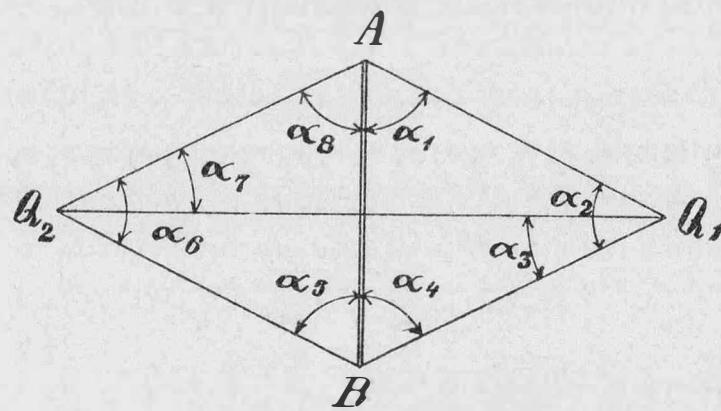


Abb. 1.

Die Erfahrung lehrt, daß lange Sichten, die als überschüssige Beobachtungen mitgenommen wurden, der Punktlage eher geschadet als genutzt haben.

Im folgenden soll diese Frage an dem Fall einer aufs äußerste vereinfachten Doppelpunkteinschaltung kurz behandelt werden.

Ausgehend von der Grundlinie $\overline{AB} = a$ sollen durch gleich große, gleichschenkelige Dreiecke die zwei Neupunkte Q_1 und Q_2 möglichst scharf bei unveränderter Gewichtssumme P bestimmt werden.

Wann sind die Sichten zwischen Q_1 und Q_2 wirksam, wann zwecklos?

Jeder der Winkel $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_8$ erhält das Gewicht p_1 , ähnlich α_2, α_6 das Gewicht p_2 und α_3, α_7 das Gewicht p_3 .

Es ist

$$x_{Q_1} = x_A + a \frac{\sin \alpha_4}{\sin \alpha_2} \cos(\sigma - \alpha_1) = x_A + \Delta x,$$

$$y_{Q_1} = y_A + a \frac{\sin \alpha_4}{\sin \alpha_2} \sin(\sigma - \alpha_1) = y_A + \Delta y,$$

daher

$$dx_{Q_1} = F = \frac{\Delta x \operatorname{ct} \alpha_4}{\rho} v_4 - \frac{\Delta x \operatorname{ct} \alpha_2}{\rho} v_2 + \frac{\Delta y}{\rho} v_1,$$

$$dy_{Q_1} = G = \frac{\Delta y \operatorname{ct} \alpha_4}{\rho} v_4 - \frac{\Delta y \operatorname{ct} \alpha_2}{\rho} v_2 - \frac{\Delta x}{\rho} v_1.$$

Drückt man alle Winkelwerte schließlich durch $\alpha_1 = \alpha$ aus, so hat man die Ausgangsgleichungen:

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w	
+ 1	+ 1	- 1	.	- 1	- 1	+ 1	.	w_1	= 0
.	.	+ 1	+ 1	.	.	- 1	- 1	w_2	= 0
+ 1	+ 1	.	+ 1	+ 1	+ 1	.	+ 1	w_3	= 0
$\operatorname{ct} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$+2\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ct} \alpha$	$+\operatorname{ct} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$+2\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ct} \alpha$	$\frac{w_4 \cdot \rho}{\operatorname{mod}}$	= 0
Δy	$+\Delta x \operatorname{ct} 2\alpha$.	$+\Delta x \operatorname{ct} \alpha$						$=F \cdot \rho$
$-\Delta x$	$+\Delta y \operatorname{ct} 2\alpha$		$+\Delta y \operatorname{ct} \alpha$						$=G \cdot \rho$
p_1	p_2	p_3	p_1	p_1	p_2	p_3	p_1		

Das Schlußergebnis der etwas umständlichen Rechnung kann man in dem nachstehenden Ausdruck zusammenfassen:

$$M_Q^2 = \frac{m^2 a^2 q_1}{\rho^2 \cdot 32 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{C_1 \operatorname{ct}^4 \alpha + C_2 \operatorname{ct}^2 \alpha + C_3 + C_4 \operatorname{tg}^2 \alpha + C_5 \operatorname{tg}^4 \alpha}{D_1 (D_2 \operatorname{ct}^2 \alpha + D_3 \operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$

Hierin bedeuten:

$$C_1 = 2 q_1^3 q_2 + 8 q_1^3 q_3 + q_1^2 q_2^2 + 8 q_1^2 q_2 q_3 + 2 q_1 q_2^2 q_3,$$

$$C_2 = 6 q_1^3 q_2 + 8 q_1^3 q_3 + 4 q_1^2 q_2^2 + 16 q_1^2 q_2 q_3 + 6 q_1 q_2^2 q_3,$$

$$C_3 = 6 q_1^3 q_2 + 8 q_1^3 q_3 + 6 q_1^2 q_2^2 + 32 q_1^2 q_3^2 + 32 q_1^2 q_2 q_3 + 14 q_1 q_2^2 q_3 + 32 q_1 q_2 q_3^2 + 8 q_2^2 q_3^2,$$

$$C_4 = 2 q_1^3 q_2 + 8 q_1^3 q_3 + 4 q_1^2 q_2^2 + 32 q_1^2 q_3^2 + 32 q_1^2 q_2 q_3 + 18 q_1 q_2^2 q_3 + 48 q_1 q_2 q_3^2 + 16 q_2^2 q_3^2,$$

$$\begin{aligned}
 C_5 &= q_1^2 q_2^2 + 8 q_1^2 q_2 q_3 + 8 q_1 q_2^2 q_3 + \\
 &\quad + 16 q_1 q_2 q_3^2 + 8 q_2^2 q_3^2, \\
 D_1 &= q_1^2 + q_1 q_2 + 2 q_1 q_3 + q_2 q_3, \\
 D_2 &= 2 q_1^2 + q_1 q_2, \\
 D_3 &= q_1 q_2 + 4 q_1 q_3 + 2 q_2 q_3 \\
 \text{und } q_1 &= \frac{1}{p_1}, \quad q_2 = \frac{1}{p_2}, \quad q_3 = \frac{1}{p_3}.
 \end{aligned}$$

Dabei entspricht m dem mittleren Fehler für die Gewichtseinheit.

An vier Sonderfällen soll der Einfluß der Verbindungssicht $Q_1 Q_2$, d. i. des Gewichtes p_3 untersucht und zahlenmäßig ausgewiesen werden; hiebei ist

$$\begin{aligned}
 4 p_1 + 2 p_2 + 2 p_3 &= P \\
 \text{und } \frac{m^2 a^2}{\rho^2 P} &= k^2, \quad M_{Q_1}^2 = M_{Q_2}^2 = M^2 \text{ gesetzt.}
 \end{aligned}$$

1. $\alpha = 75^\circ$

$p_1 : p_2 : p_3$	$M^2 : k^2$
1 : 1 : 1	77,486
5 : 14 : 0	57,538
1 : 4 : 0	59,002
4 : 15 : 1	60,672
5 : 0 : 14	125,256
0 : 1 : 2	1838,524

Die beste Lösung ist die zweite, bei der die Sicht $Q_1 Q_2$ als nicht beobachtet und das Verhältnis $p_1 : p_2$ mit 5 : 14 (genauer 21,1 : 57,8) [Literaturhinweis (2)] angenommen wurde; die Ausgleichung beschränkt sich auf die Abstimmung zweier Dreiecke. Auffallend schlecht erscheint die letzte Lösung, die der Hansen-schen Aufgabe entspricht.

2. $\alpha = 60^\circ$

$p_1 : p_2 : p_3$	$M^2 : k^2$
1 : 1 : 1	9,115
1 : 1 : 0	8,000
4 : 3 : 1	8,347
1 : 1 : 3	11,734
1 : 0 : 4	12,000
0 : 1 : 2	36,000

Ähnlich wie vorhin soll auch hier die Verbindung $Q_1 Q_2$ entfallen, da sich der kleinste Punktfehler für $p_3 = 0$, $p_1 = p_2 = \frac{P}{6}$ einstellt.

3. $\alpha = 45^\circ$

$p_1 : p_2 : p_3$	$M^2 : k^2$
1 : 1 : 1	4,000
3 : 1 : 0	3,733
5 : 1 : 1	3,804
4 : 1 : 3	4,000
5 : 0 : 2	4,114
0 : 1 : 2	6,000

Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Gewichtsverteilungen sind geringer geworden. Der kleinste Fehler 3,733 für $p_3 = 0$ und $p_1 : p_2 = 3 : 1$ (genauer 42,3 : 15,4) [Literaturhinweis (2)] weicht vom Fehler 3,804 für $p_1 : p_2 : p_3 = 5 : 1 : 1$ recht wenig ab; es könnte also die Verbindungssicht beobachtet werden, die Ausgleichsarbeit würde natürlich wachsen.

4. $\alpha = 30^\circ$

$p_1 : p_2 : p_3$	$M^2 : k^2$
1 : 1 : 1	2,971
9 : 2 : 4	2,894
2 : 1 : 1	2,928
5 : 0 : 2	2,966
1 : 0 : 0	3,586
0 : 1 : 2	6,000

Die Verbindungssicht zwischen den beiden Neupunkten $Q_1 Q_2$ ist jetzt kürzer als die sonstigen Bestimmungsstrahlen; ihre Mitbeobachtung ist notwendig und verbürgt eine sichere Punktlage.

Man kann wohl annehmen, daß das Ergebnis dieser Betrachtungen auch in anderen Fällen Geltung haben wird: lange Sichten zwischen Neupunkten sollen vermieden oder höchstens für Zwecke einer allgemeinen Nachprüfung verwendet werden.

Zum Schluß sollen einige Bemerkungen zur Gewichtsverteilung bei eingehängten, gestreckten und gleichseitigen Theodolitzügen angefügt werden.

Da die Querverschiebung in der Zugmitte nur von den Winkelfehlern abhängt, hat man bei einem sechsseitigen Zug die Bedingungsgleichungen [Literaturhinweis (3)] und die Fehlerfunktion F :

$$\begin{aligned}
 v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + w &= 0, \\
 -v_1 \frac{s}{\rho} - v_2 \frac{2s}{\rho} - v_3 \frac{3s}{\rho} - v_4 \frac{4s}{\rho} - v_5 \frac{5s}{\rho} - v_6 \frac{6s}{\rho} + \left(h - \frac{6ws}{\rho} \right) &= 0, \\
 v_0 \frac{3s}{\rho} + v_1 \frac{2s}{\rho} + v_2 \frac{s}{\rho} &= F.
 \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Zuges müssen sein

$$p_0 = p_6, \quad p_1 = p_5, \quad p_2 = p_4$$

und mit

$$\frac{1}{p_0} = q_0, \quad \frac{1}{p_1} = q_1, \quad \frac{1}{p_2} = q_2, \quad \frac{1}{p_3} = q_3$$

findet man leicht die Übertragungsgleichungen

$$(2q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3)r_1 - \frac{3s}{\rho}(2q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3)r_2 = \\ = -\frac{s}{\rho}(3q_0 + 2q_1 + q_2), \\ -\frac{3s}{\rho}(2q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3)r_1 + \frac{s^2}{\rho^2}(36q_0 + 26q_1 + 20q_2 + 9q_3) = \\ = \frac{2s^2}{\rho^2}(q_1 + q_2)$$

nebst

$$\frac{s}{\rho}(3q_0 + 2q_1 + q_2)r_1 - \frac{2s^2}{\rho^2}(q_1 + q_2)r^2 + \frac{s^2}{\rho^2}(9q_0 + 4q_1 + q_2) = \left[\frac{FF}{p} \right].$$

Hieraus berechnet man

$$r_2 = \frac{1}{2}, \\ r_1 = -\frac{s}{2\rho} \cdot \frac{12q_0 + 10q_1 + 8q_2 + 3q_3}{2q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3}$$

und erhält für die mittlere Querverschwenkung in der Mitte des sechsseitigen Zuges

$$M_3^2 = m^2 \left[\frac{FF}{p} \right] = \frac{m^2 s^2}{2\rho^2} \cdot \frac{q_0(2q_1 + 8q_2 + 9q_3) + 2q_1(q_2 + 2q_3) + q_2q_3}{2q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3}.$$

Ähnlich ergibt sich für den achtseitigen Zug

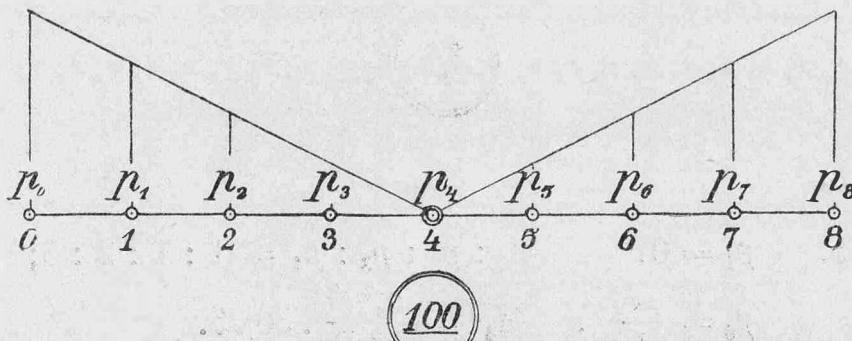
$$M_4^2 = \frac{m^2 s^2}{2\rho^2} \cdot \frac{Z}{N}$$

mit $Z = 2q_0(q_1 + 4q_2 + 9q_3 + 8q_4) + q_1(2q_2 + 8q_3 + 9q_4) + 2q_2(q_3 + 2q_4) + q_3q_4,$

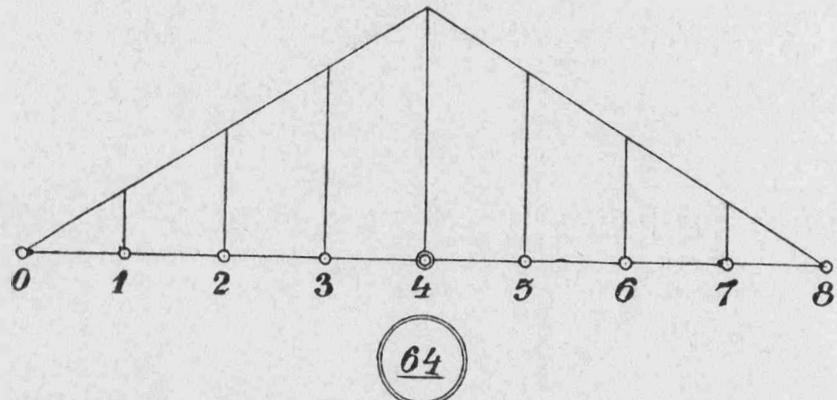
$$N = 2(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) + q_4.$$

Die Querverschiebung in der Zugsmitte ist im folgenden für sechs verschiedene Gewichtsverteilungen durchgerechnet und durch Bilder veranschaulicht, in denen die Winkelgewichte als Normalen in den Zugpunkten dargestellt sind.

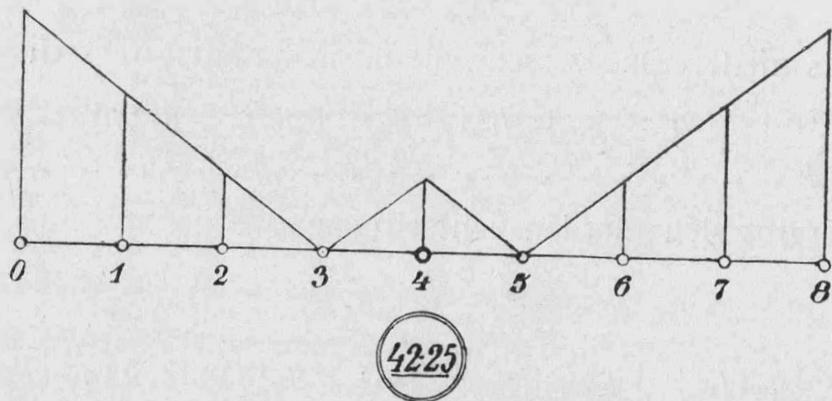
1. $p_4 = 0: \quad p_0 : p_1 : p_2 : p_3 = 4 : 3 : 2 : 1;$
 $p_0 = \frac{4P}{20}, \quad M_4^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2 P} \cdot 100.$



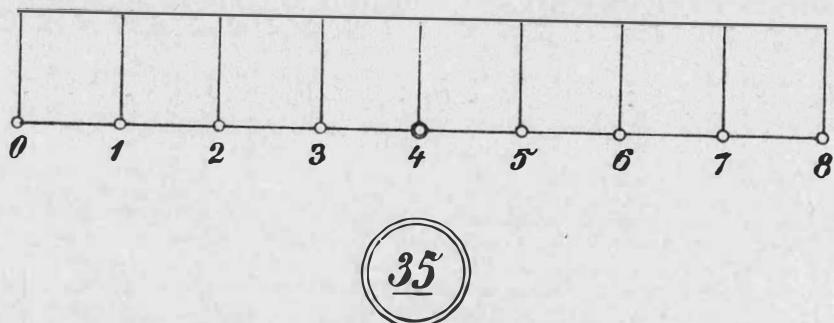
2. $p_0 = 0:$ $p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = 1 : 2 : 3 : 4;$
 $p_1 = \frac{P}{16}, \quad M_4^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2 P} \cdot 64.$



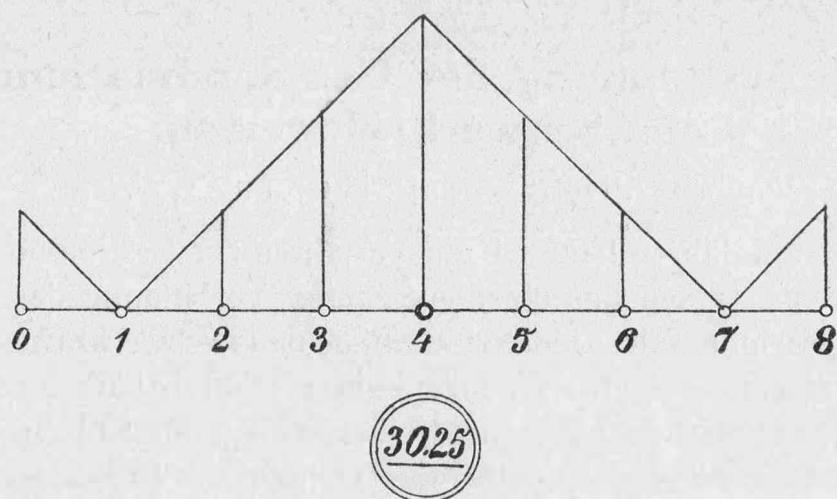
3. $p_3 = 0:$ $p_0 : p_1 : p_2 : p_4 = 3 : 2 : 1 : 1;$
 $p_0 = \frac{3P}{13}, \quad M_4^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2 P} \cdot 42,25.$



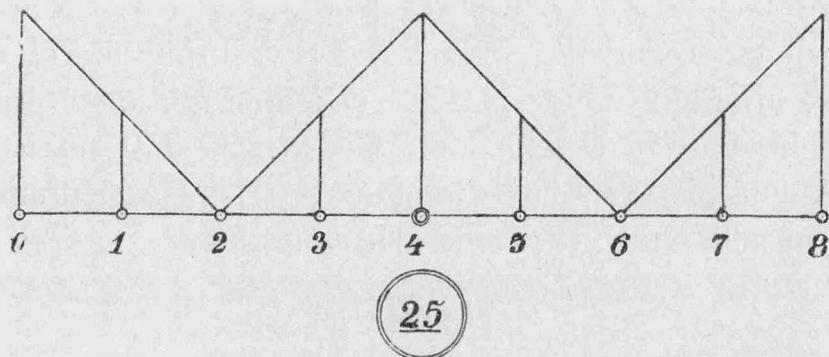
4. $p_0 = p_1 = \dots = p_8 = \frac{P}{9}; \quad M_4^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2 P} \cdot 35.$



5. $p_1 = 0:$ $p_0 : p_2 : p_3 : p_4 = 1 : 1 : 2 : 3;$
 $p_0 = \frac{P}{10}, \quad M_4^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2 P} \cdot 30,25.$



6. $p_2 = 0$: $p_0 : p_1 : p_3 : p_4 = 2 : 1 : 1 : 2$;
 $p_0 = \frac{2 P}{10}$, $M_4^2 = \frac{m^2 s^2}{\rho^2 P} \cdot 25$.



Ob ein Streckenzug viele oder wenige Seiten hat, immer sollen die Winkel an den Enden und in der Mitte des Zuges schärfer gemessen werden, damit die Querverschiebung in der Zugsmitte möglichst klein wird. [Literaturhinweis (4)].

L iteratur h i n w e i s :

1. Helmert, Ausgleichsrechnung, 2. Aufl., S. 12 f.
2. Hellebrand, Die günstigste Gewichtsverteilung, Sitzungsberichte d. Akademie d. Wissenschaften, Wien, Bd. 118, S. 29 f.
3. Hellebrand, Zur strengen Ausgleichung von Theodolitzügen. Diese Zeitschrift, 1926. S. 58.
4. Jordan-Egger, Vermessungskunde, Bd. 2/1. S. 558.

Die Bestimmung der Geoidundulationen aus Schwerkraftwerten.

Von wirkl. Hofrat Dr. F. Hopfner, Wien.

Vor bald zwei Jahren habe ich ein Verfahren zur Bestimmung des Geoids angegeben, das im Wesen aus einer geeigneten Verbindung der Stokes'schen Formeln zur Berechnung der Geoidundulationen aus Schwerkraftwerten mit der Clairaut'schen Formel besteht (1). In diesem Verfahren hat das Koordinatensystem eine sehr spezielle Lage; sein Ursprung liegt im Erdschwerpunkt und seine Achsen fallen mit den Hauptträgheitsachsen des Erdkörpers zusammen. Das Verfahren vernachlässigt Größen vom Quadrat der Abplattung. Im nachstehenden soll ein Verfahren entwickelt werden, das keine spezielle Lage des Koordinatensystems verlangt und nur Größen vom Quadrat der Undulationen vernachlässigt.

1. Wir gehen von der Kräftefunktion

$$W = U + T$$

aus und beziehen das Geoid $W = C$ auf das Niveausphäroid $U_0 = C$ gleichen Potentialwertes. Im Punkt P des Geoids errichten wir die Normale, die das Niveausphäroid im Punkte Q schneidet. Die Strecke PQ bezeichnen wir mit ζ ; sie ist die Undulation des Geoids im Punkte P ; im Außenraum des Geoids sei ζ positiv. Bis auf Größen von der Ordnung ζ^2 ist

$$U = U_0 - \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_0 \zeta$$

und daher

$$W = U_0 - \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_0 \zeta + T; \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

n bezeichnet die äußere Normale und der Index Null Werte am Niveausphäroid. Wir leiten die Gleichung nach n ab und erhalten

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right)_0 \zeta + \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Im Hinblick auf die Formeln

$$\frac{\partial W}{\partial n} = -g, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\gamma,$$

die die Ableitungen mit der Schwerkraftbeschleunigung g und der theoretischen Schwerkraftbeschleunigung γ verbinden, ergibt sich

$$g = \gamma + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right)_0 \zeta - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) beziehen wir auf das Geoid $W = C$; man erhält hiervon, da $U_0 = C$ ist,

$$\zeta = -\frac{T}{\gamma}, \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$g - \gamma = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right)_0 \zeta - \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Erstere Gleichung ist das bekannte Theorem von Bruns; mit ihm erteilen wir der zweiten Gleichung die Form

$$g - \gamma = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) T - \frac{\partial T}{\partial n}. \quad \dots \dots \dots \quad 4)$$

In diesen Gleichungen beziehen sich γ und seine Ableitung auf das Niveausphäroid, hingegen T und seine Ableitung auf das Geoid. Die Gleichungen 3) und 4) enthalten die Lösung der Aufgabe; denn die Gleichung 4) bestimmt die Restfunktion T in Funktion der Schwerkraftstörung $g - \gamma$; die Gleichung 3) gibt sodann die Undulation ζ .

2. Zur praktischen Lösung der Aufgabe denken wir uns die Werte $g - \gamma$ der Schwerkraftstörung in eine nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickelt. Jede Kugelfunktion zerlegen wir in ihre $2n + 1$ Elementarfunktionen; dann ist in der bekannten Schreibweise für die Lamé'schen Funktionen

$$g - \gamma = \sum_{K=0}^{K=\infty} g_K M_K N_K; \quad \dots \dots \dots \quad 5)$$

M_K bedeutet die zugeordnete Kugelfunktion $X_n^{(p)}$, N_K die Funktion $\cos p\varphi$ oder $\sin p\varphi$.

Die Ableitung $\partial \gamma / \partial n$ ist praktisch konstant; auch γ unterscheidet sich nur um Größen von der Ordnung der Abplattung von einer Konstanten. Man kann daher

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} = c + \alpha H \quad \dots \dots \dots \quad 6)$$

setzen; c ist eine Konstante, H ist eine Ortsfunktion am Niveausphäroid.

Die Integration der Differenzialgleichung 4) kann sodann auf jene Weise erfolgen, die Poincaré in einem ähnlichen Falle angewendet hat (2). Man denke sich T in eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe der Form

$$T = T_0 + T_1 \alpha + T_2 \alpha^2 + \dots$$

entwickelt. Wir tragen die Reihe in die Gleichung 4) ein; da diese identisch, d. h. für einen jeden Wert von α besteht, sind die Koeffizienten aller Potenzen von α Null. Man erhält hiernach im Hinblick auf die Gleichung 6) das System von unendlich vielen Gleichungen.

$$g - \gamma - \left(c T_0 - \frac{\partial T_0}{\partial n} \right) = 0, \quad \dots \dots \dots \quad 7a)$$

$$H T_0 - \left(c T_1 - \frac{\partial T_1}{\partial n} \right) = 0, \quad \dots \dots \dots \quad 7b)$$

$$H T_1 - \left(c T_2 - \frac{\partial T_2}{\partial n} \right) = 0,$$

.....

Die Entwicklung von $g - \gamma$ nach Produkten $M_K N_K$ liegt in der Gleichung 5) vor. Auf ähnliche Weise denken wir uns jede Funktion T_i in der Potenzreihe für die Restfunktion T im Außenraum des Geoids in eine Reihe nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelt und sodann jede Kugelfunktion in ihre Elementarfunktionen zerlegt. Man erhält hiernach, da die Reihen mit der Kugelfunktion dritter Ordnung beginnen,

$$T_i = \sum_{K=9}^{K=\infty} \beta_K^{(0)} S_K M_K N_K; \dots \dots \dots \quad 8)$$

die Bedeutung von $M_K N_K$ kennen wir; mit S_K bezeichnen wir die Funktion

$$\frac{1}{r^n + 1};$$

n ist die Ordnung des Produktes $M_K N_K$ vom Index K .

Die Entwicklungen 5) und 8) tragen wir in die Gleichung 7a) ein. Der Funktion T_0 und ebenso ihrer Ableitung sind ihre Werte am Geoid beizulegen; geeignete Näherungswerte für r liegen hiezu vor. Die Gleichung 7a) ist für jeden Wert der Produkte $M_K N_K$ erfüllt; also sind alle Koeffizienten der Produkte $M_K N_K$ Null. Man erhält hiedurch das System von unendlich vielen linearen Gleichungen zur Berechnung der Konstanten $\beta_K^{(0)}$

$$\alpha_K - \beta_K^{(0)} \left[c S_K - \frac{\partial S_K}{\partial n} \right] = 0, K = 9, 10, 11, \dots$$

Mit den Konstanten $\beta_K^{(0)}$ ist auch die Funktion T_0 bekannt.

Mit ihrer Kenntnis ist die Kenntnis des ersten Gliedes auf der linken Seite der Gleichung 7b) verbunden. Man wird es ebenso nach Produkten $M_K N_K$ wie die linke Seite der Gleichung 5) entwickeln und sodann die Gleichung 7b) in gleicher Weise zur Berechnung der Funktion T_1 verwenden wie die Gleichung 7a) zur Berechnung der Funktion T_0 . Ebenso wird man die weiteren Gleichungen behandeln.

Wenn die Werte der Funktionen T_i am Geoid vorliegen, kennt man auch die Werte der Funktion T in den Punkten des Geoids. Das Theorem von Bruns gibt sodann die Undulationen ζ des Geoids gegenüber dem Niveausphäroid gleichen Potentialwertes. Die eingangs formulierte Aufgabe hat hiemit auch ihre praktische Lösung gefunden.

Sie setzt die Konvergenz der Reihen 8) am Rande des Geoids und in seinem Außenraum voraus. Ich habe gezeigt, daß eine solche Entwicklung für das äußere Potential existiert (3).

Man kann aber die hier vorliegende besondere Randwertaufgabe in eine solche für den Außenraum verwandeln, wenn man sich die im Außenraum des Geoids liegenden Massen durch eine Massenbelegung am Geoid so ersetzt denkt, daß das Potential des Erdkörpers daselbst keine Änderung erfährt; mit anderen Worten: man übertrage die beobachteten Schwerkraftwerte nach Rudzki's Reduktionsverfahren auf das Geoid (4).

L i t e r a t u r:

- (1). F. Hopfner, Die hypothesenfreie Reduktion und numerische Verarbeitung der beobachteten Schwerkraftwerte, Gerlands Beitr. z. Geoph. 25 (1930).
- (2). H. Poincaré, Les mesures de gravité et la Géodésie, Bull. astron. 18 (1901).
- (3). F. Hopfner, Die Entwicklung des Raumpotentials nach Kugelfunktionen, Gerlands Beitr. z. Geoph. 29 (1931).
- (4). M. P. Rudzki, Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité, Bull. astron. 22 (1905).

Das Seitwärtseinschneiden im Raum.

Von Professor Dr. Ing. J. Koppmaier, Graz.

Die Luftphotogrammetrie stellte der Geodäsie ganz neue Aufgaben, in erster Linie das Rückwärtseinschneiden im Raum, eine Aufgabe, der inzwischen eine stattliche Sonderliteratur¹⁾ gewidmet wurde, welche in analytischer Hinsicht als abgeschlossen bezeichnet werden kann, umso mehr, als dieses Problem seine praktische Bedeutung zum größten Teile wieder verloren hat.

Weiterhin ist die Doppelpunkteinschaltung im Raum zu nennen, die heute noch im Vordergrunde des praktischen Interesses steht, sich jedoch gänzlich von der analytischen Methode weg zu Gunsten der rein mechanischen Lösung entwickelt hat.

Eine weit jüngere Aufgabe ist das Vorwärtseinschneiden im Raum²⁾, die weniger durch die Luftbildmessung, als vielmehr durch verschiedene andere Aufgaben, wie die Bestimmung von Flugbahnen bedingt ist; diese Aufgabe hat sich von vornherein die modernen Errungenschaften der Technik nutzbar gemacht, so daß die am weitesten entwickelte Lösung als elektrischer Vorwärtsschnitt bezeichnet werden kann (D. R. P. 301 322 der Firma Zeiss, Kinotheodolit, Doppelanschnittgerät). Der Kern dieser Aufgabe liegt nicht in der Auswertung wie etwa beim Rückwärtsschnitt, sondern in der Aufnahmetechnik.

Es ist nun in dieser Folge naheliegend, auch die Möglichkeit des Seitwärtseinschneidens im Raum zu untersuchen:

I. Ohne der allgemeinen Gültigkeit des Resultates Abbruch zu tun, kann für die folgende Darlegung der Spezialfall ins Auge gefaßt werden, daß es sich um die Festlegung des jeweiligen Standortes $C(x_3, y_3, z_3)$ eines Flugzeuges (oder eines bestimmten Punktes desselben) handelt. Nimmt man nun zwei bekannte Bodenpunkte $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$, alle bezogen auf ein und dasselbe, aber beliebige (Horizontal-)Koordinatensystem, zu Hilfe, so ist dadurch eine feste Basis AB gegeben, welche mit dem jeweiligen Luftstandpunkt C ein Dreieck bestimmt.

Das Dreieck ABC liegt nun nicht in einer Horizontalebene, sondern beliebig im Raum. Nach der Definition des Seitwärtseinschneidens muß der Dreieckswinkel in $A = \alpha$ oder in $B = \beta$ und auf jeden Fall der Winkel in $C = \gamma$ gemessen werden, damit das Dreieck als solches bestimmt ist; dann bestehen die einfachen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ \overline{AC} &= \overline{AB} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \\ \overline{BC} &= \overline{AB} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad 1)$$

¹⁾ O. v. Gruber, Ferienkurs in Photogrammetrie, S. 13.

²⁾ Darunter ist hier das Vorwärtseinschneiden von der Erde aus nach in der Luft befindlichen Objekten zu verstehen (Doppelanschnitt vom Erdboden aus), während das Vorwärtseinschneiden im umgekehrten Sinne, nämlich von zwei Luftstandpunkten aus gegen

Wird nun z. B. in B auch der Höhenwinkel ζ_2 des Strahles BC und der Horizontalwinkel $A_0 B_0 C_0$ ³⁾ = β_0 gemessen, so sind damit die Raumkoordinaten von C festgelegt; unter der Annahme des allgemeinen deutschen Koordinatensystems wird:

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = x_2 + \overline{BC} \cdot \cos \{(BA) + \beta_0\} \\ y_3 = y_2 + \overline{BC} \cdot \sin \{(BA) + \beta_0\} \\ z_3 = z_2 + \overline{BC} \cdot \sin \zeta_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 2)$$

Jeder neue Stand des Flugzeuges liefert einen anderen Punkt C , der immer auf demselben Wege [Gleichung 1) und 2)] koordiniert werden kann. Es ist dies umso einfacher, als die Basis für einen gewissen Flugbereich immer dieselbe bleiben kann, so daß durch jeden neuen Standort C je eine Ebene ABC bestimmt ist; die Gesamtheit aller dieser Ebenen ist ein Ebenenbüschel, dessen Träger die Basis AB ist.

Damit ist die an sich recht einfache Aufgabe gelöst und diese Lösung wäre an sich ganz bedeutungslos, wenn nicht Mittel und Wege vorhanden wären, welche die Messung der notwendigen Bestimmungsstücke zu ermöglichen scheinen.

II. Die Messung der Winkel läßt sich unter Verwendung von Spiegeln bewerkstelligen. Wird z. B. in B ein Spiegel so gestellt, daß das Spiegelbild A' des Punktes A sich mit dem direkt gesehenen Punkte C immer deckt, dann schließt die Spiegelnormale mit AB den $\frac{\beta}{2}$ ein. Bringt man senkrecht zur Spiegelachse einen Teilkreis an, so wird dieser bei dem Verfolgen des Flugzeuges ständig in der Positionsebene ABC liegen, sobald das Spiegelbild A' mit C sich deckt. Die Spiegelachse steht also immer senkrecht auf der jeweiligen Ebene ABC und man liest somit an dem Teilkreise tatsächlich den Positionswinkel $\frac{\beta}{2}$ oder je nach der Bezifferung β ab. Das ist praktisch wohl auch nur dadurch ausführbar, daß die Winkel und das Gesichtsfeld eines Zielfernrohres photographisch (s. Kinotheodolit) registriert werden, weil dadurch etwaige Differenzen in der Koinzidenz der Punkte A' und C nachträglich berücksichtigt werden können.

Die Winkel β_0 und ζ_2 kann man wie bisher messen, etwa mit dem Kinotheodolit.

Der Winkel γ in C kann auf dieselbe Weise und mit derselben Vorrichtung wie Winkel β gemessen werden; verstellt der Beobachter im Flugzeug einen Spiegel so, daß das Spiegelbild A' von A mit dem direkt gesehenen Punkt B sich deckt, so schließt auch hier die Spiegelnormale mit CA den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ ein, der an einem Teilkreis abgelesen, bzw. wieder photographisch registriert werden kann.

Bodenpunkte bereits zu den Anfängen der Luftphotogrammetrie, als zum Wesen derselben gehörig, zu rechnen ist.

³⁾ Die Punkte A_0 , B_0 , C_0 sind die Orthogonalprojektionen der entsprechenden Punkte A , B , C auf die Horizontalebene des angenommenen Koordinatensystems (x , y , z).

III. Auch hier ist natürlich wie beim elektrischen Vorwärtsschnitt notwendig, daß die Messung oder Registrierung der Winkel in *B* und *C* genau gleichzeitig erfolgt, was hier durch drahtlose Auslösung oder durch Photozellen bewerkstelligt werden könnte. Somit wäre dieses Verfahren ähnlich dem elektrischen Vorwärtseinschneiden auch als elektrisches Seitwärtseinschneiden zu bezeichnen; es haften diesem Verfahren auch dieselben Fehler an wie dem Vorwärtsschnitt, man kann lediglich vermuten, daß die bisher so gefährlichen Fehler der Synchronisierung der Verschlüsse in *A* und *B* bei dem neuen Verfahren sich nicht so schlimm auswirken können oder bis auf die Trägheit einer Photozelle ganz wegfallen, nachdem die direkte Sicht *BC* immer möglich sein muß. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Auslösung der Verschlüsse in *B* und *C* auf lichtelektrischem Wege möglich ist.

IV. Versucht man dieses Verfahren auch der Luftbildmessung dienstbar zu machen, so ist außer der Koordinierung von *C* auch die Orientierung der Plattenebene in *C* erforderlich. Das bietet aber keine weiteren Schwierigkeiten mehr, wenn die Plattenebene immer auf die Positionsebene *ABC* bezogen wird, etwa derart, daß die Aufnahmekamera mit der Spiegelachse in *C* gekoppelt ist.

Die jeweilige Positionsebene *ABC* bildet also die Brücke, um von *B* die Lotrichtung nach *C* zu übertragen, denn in *B* ist die Positionsebene gegen das Lot und gegen eine beliebige Orientierungsrichtung im Horizont festgelegt (durch die Bestimmung zweier in dieser Ebene liegender Strahlen, nämlich *BA* und *BC*) und wenn nun die Plattenebene in *C* in bezug auf diese Positionsebene feststeht, ist hiemit auch in *C* die Lotrichtung und die Orientierung in horizontaler Richtung bekannt, was die Voraussetzung für die Verwendung der Aufnahme für die Luftbildmessung darstellt.

Da es bei der Luftbildmessung nicht notwendig ist, im vorhinein jeden Punkt *C* zu koordinieren, wohl aber in jedem Punkte *C* die Lotrichtung und die Orientierung im Horizont zu kennen, kann man für den Fall, daß ein Punkt *A* nicht zur Verfügung steht, an dessen Stelle auch ein nicht koordiniertes, fernes Ziel benützen; dasselbe muß nur von *B* und *C* aus sichtbar sein; hier ist auch die Verwendung der Sonne als Zielpunkt *A* denkbar, wie in anderem Zusammenhange schon verschiedentlich vorgeschlagen wurde; dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß infolge der Sonnenbewegung (Erdbewegung) störende Korrekturen notwendig werden. Einfacher wäre es wohl immer noch, bei einem Bodenpunkte *A* als Ziel zu bleiben und diesen, wenn notwendig, mit einem Heliotropen auszurüsten, vielleicht sogar mit einem Doppelheliotropen, so daß *B* und *C* gleichzeitig Licht bekommen.

V. Bedenkt man, daß für die praktische Anwendung dieses Verfahrens ein eigenes Instrumentarium notwendig wird, so besteht zunächst wenig Aussicht für seine praktische Verwertung, es sei denn, daß sich bei dieser Methode dem elektrischen Vorwärtsschnitt gegenüber grundlegende Vorteile herauslösen, die nur bei der Synchronisierung in dem oben (III.) angedeuteten Ausmaße liegen könnten.

Die Aufsuchung und die Wiederherstellung verloren gegangener trigonometrisch bestimmter Punkte.

Von Obervermessungsrat Ing. K. L e g o, Wien.

Dieses Problem ist in der Fachliteratur schon vielfach behandelt worden. Da es in jüngster Zeit durch die Instandsetzungsarbeiten der Vermarkung an den Reichsgrenzen wieder aktuell geworden ist, dürfte eine systematische Zusammenfassung und damit verbundene Ergänzung und Erweiterung der diese Frage behandelnden Arbeiten von Interesse sein¹⁾.

Es handelt sich, wie der Titel sagt:

1. Um Aufsuchung von trigonometrischen Punkten oder Grenzzeichen²⁾, deren oberirdische Markierung verloren gegangen oder infolge Verwachsung, Erdrutsch usw. nicht mehr sichtbar ist.

2. Um Wiederherstellung vollständig verlorengegangener Punkte. Bei Grenzzeichen wird meistens die Neuaufstellung am Platze des alten, verlorengegangenen Punktes erfolgen müssen. Bei trigonometrischen Punkten wird es aber gewöhnlich genügen, einen möglichst nahe liegenden Punkt durch Erhebung seiner Zentrierungselemente gegenüber dem verlorengegangenen trigonometrischen Punkt festzulegen.

3. Um Auffindung von solchen Punkten, die durch mindestens drei Richtungsmessungen nach markanten, jedoch geodätisch n i c h t festgelegten Punkten, wie Kirchturmspitzen, Blitzableiter, Hausecken, Dachgiebel, Schornsteine usw. versichert worden sind.

Das Prinzip aller Wiederherstellungsverfahren ist bei allen Autoren und in allen Fällen das gleiche. Es besteht darin, auf einem dem gesuchten Punkt P_0 nahe gelegenen Ort P'_0 möglichst viele der ursprünglich gemachten Winkel- oder Richtungsmessungen (und zwar mindestens zwei Winkel oder drei Richtungen) tunlichst in der gleichen Art zu wiederholen. Aus der Differenz der alten, aus den früheren Protokollen entnommenen Messungswerte und der auf dem Näherungspunkte P'_0 erhaltenen, ist der Abstand e des Näherungspunktes und das Azimut ϵ der Verbindungsgeraden abzuleiten.

Sind die gegebenen Punkte³⁾: $P_1, P_2 \dots \dots \dots P_n$,
die alten auf P_0 gemachten Richtungsmessungen: $R_{0,1}, R_{0,2} \dots \dots R_{0,n}$,
die auf dem Näherungspunkt P'_0 gemachten
Richtungsmessungen: $R'_{0,1}, R'_{0,2} \dots \dots R'_{0,n}$
so sind die Elemente e und ϵ lediglich aus den Differenzen

¹⁾ Die dem Verfasser zur Verfügung gestandenen und behandelten Arbeiten sind am Schlusse dieses Aufsatzes in chronologischer Reihenfolge angeführt.

²⁾ Im Hochgebirge werden die Reichsgrenzezeichen meistens auf trigonometrischem Wege bestimmt.

³⁾ Außerdem mögen nachstehende Bezeichnungen eingeführt werden: Beobachtete Richtungen: $R_{0,k}, R_{k,0}$. Beobachtete Richtungswinkel oder orientierte Richtungen: $N_{0,k}, N_{k,0}$. Aus Koordinaten gerechnete Richtungswinkel $v_{0,k}, v_{k,0}$. Winkel im gesuchten Punkt P_0 : $\gamma_{i,k}$, im Näherungspunkt P'_0 : $\gamma'_{i,k}$, in den gegebenen Punkten, u.zw. in P_1 : α_1 , in P_2 : α_2 usw.

$$\left. \begin{array}{l} R_{0,1} - R'_{0,1} = \Delta R_{0,1} \\ R_{0,2} - R'_{0,2} = \Delta R_{0,2} \\ \vdots \\ R_{0,n} - R'_{0,n} = \Delta R_{0,n} \end{array} \right\} \quad \dots \quad 1)$$

abzuleiten. Es werden nur noch Näherungswerte für die Seiten $P_0 P_1 = s_1$, $P_0 P_2 = s_2$ usw. zur Berechnung der Richtungskoeffizienten verwendet, doch kann auch dies durch eine zweite Instrumentaufstellung, wie später gezeigt werden wird, umgangen werden. Es ist beachtenswert, daß die Berechnung der Wiederherstellungselemente von den Koordinaten der gegebenen Punkte P_1, P_2, \dots, P_n ganz unabhängig durchgeführt werden kann und nur von den erhaltenen Richtungswidersprüchen ΔR , bzw. bei Winkelmessungen von den Winkelwidersprüchen $\Delta \gamma$ abhängig ist.

Ihre Berechnung kann auf verschiedene Art erfolgen. Im Wesen ist die Aufgabe nichts anderes als die Umkehrung der Zentrierungsaufgabe. Es sind aus den Differenzen der Messungen im Zentrum und im Exzenter die Zentrierungselemente e und ε mit Hilfe der Zentrierungsgleichungen abzuleiten. (Siehe Abb. 1.)

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{1,2} - \gamma'_{1,2} = \Delta \gamma_{1,2} = \rho'' e \left(\frac{\sin(\gamma'_{1,2} - \varepsilon)}{s_2} + \frac{\sin \varepsilon}{s_1} \right) \\ \gamma_{1,3} - \gamma'_{1,3} = \Delta \gamma_{1,3} = \rho'' e \left(\frac{\sin(\gamma'_{1,3} - \varepsilon)}{s_3} + \frac{\sin \varepsilon}{s_1} \right) \\ \vdots \\ \gamma_{1,n} - \gamma'_{1,n} = \Delta \gamma_{1,n} = \rho'' e \left(\frac{\sin(\gamma'_{1,n} - \varepsilon)}{s_n} + \frac{\sin \varepsilon}{s_1} \right) \end{array} \right\} \quad \dots \quad 2)$$

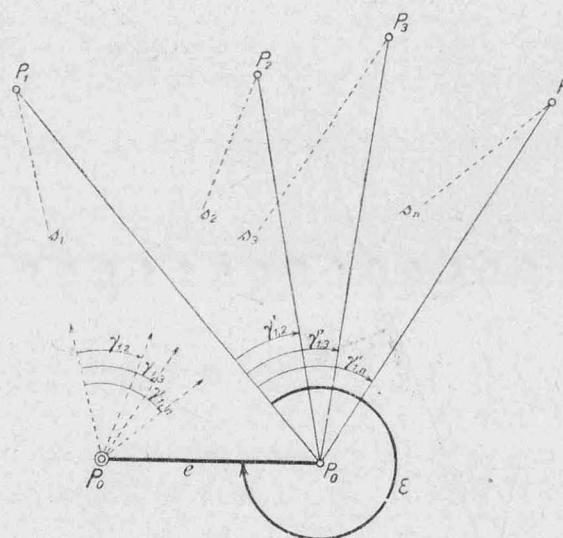


Fig. 1

Aus den Gleichungen 2) sind die wahrscheinlichsten Werte von e und ε zu berechnen. Vorländer⁴⁾ hat bereits im Jahre 1875 in der Zeitschrift für Vermessungswesen dieses Thema behandelt. Seine dortigen Ableitungen ließen sich wohl etwas vereinfachen, und zwar durch Einführung eines Hilfs-

⁴⁾ Die ausführlichen Titel der angeführten Arbeiten sind aus der Literaturzusammenstellung am Schlusse dieses Aufsatzes zu entnehmen.

winkels zur Transformation der obenstehenden Vermittlungsgleichungen, um die Unbekannte ϵ linear machen zu können. Ferner könnte man statt der erst zu messenden Winkel γ' die bekannten Winkel γ einführen und dadurch die Koeffizienten der Fehlergleichungen schon vor der Feldarbeit in der Kanzlei rechnen. Immerhin bleibt die Berechnung auf diesem Wege umständlicher als nach den Verfahren der trigonometrischen Punktbestimmung, weshalb gleich zu letzteren übergegangen werden soll.

Diese Verfahren kann man in Näherungsverfahren und in Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate einteilen, wobei die letzteren noch in zwei Untergruppen geschieden werden sollen, und zwar für den Fall, daß die gegebenen Punkte geodätisch bestimmt und daß sie geodätisch nicht bestimmt sind.

1. Näherungsverfahren.

Sie werden hauptsächlich zum Wiederaufsuchen von solchen Punkten angewendet, deren unterirdische Vermarkung vorhanden, jedoch oberirdisch nicht gekennzeichnet ist.

Eines der raschesten und einfachsten wird das im österreichischen Kataster gebräuchliche Verfahren sein, welches von Broch im Jahre 1905 in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen mitgeteilt worden ist, wahrscheinlich aber schon von Horsky (1811—1866) stammen dürfte.

Aus der Differenz der im Näherungs- und im gesuchten Punkte gemessenen Winkel werden ohne jede vorbereitende Rechnung die Elemente zur Ermittlung der Ortslage des letzteren mit Hilfe des Horsky'schen Diagrammes⁵⁾ ermittelt. Der Vorgang ist in Kürze folgender:

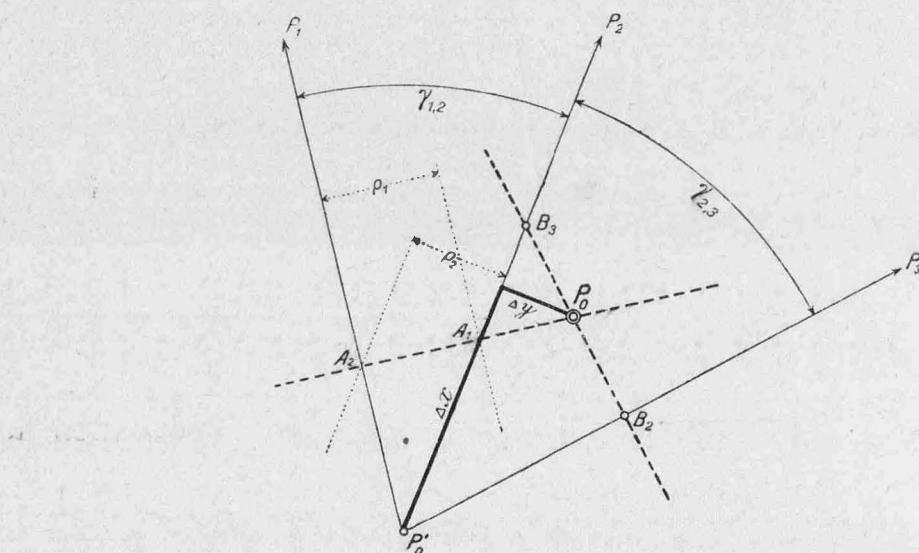


Fig. 2

Die im Näherungspunkt P'_0 gemessenen Winkel $\gamma'_{1,2}$ und $\gamma'_{2,3}$ oder, was für die graphische Darstellung gleich bleibt, die den alten Protokollen entnommenen Winkel $\gamma_{1,2}$ und $\gamma_{2,3}$ werden graphisch dargestellt. (Fig. 2.) Mit dem

⁵⁾ Über das Horsky'sche Diagramm siehe: Hartner-Doležal, Lehrbuch der Niederer Geodäsie, 10. Aufl. 1921, S. 825—837.

Argument $\triangle \gamma_{1,2} = \gamma_{1,2} - \gamma'_{1,2}$ und der Seite s_1 entnimmt man im Maßstab 1:12·5 dem Horsky'schen Diagramm jene Verschiebung $p_1 = \frac{s_1}{\rho''} \triangle \gamma_{1,2}$, die man dem Punkte P'_0 erteilen muß, damit sich die Neigung der Seite $P'_0 P_1$ um $\triangle \gamma_{1,2}$ ändert. Eine Parallele, im Abstande p_1 zu s_1 gezogen, schneidet die Seite $P'_0 P_2$ in dem Punkte A_1 , der die Eigenschaft hat, daß er mit P_1 und P_2 den Winkel $\gamma_{1,2} = \gamma'_{1,2} + \triangle \gamma_{1,2}$ bildet. (Parallele auf der richtigen Seite des Winkelschenkels ziehen! Achten, ob der Winkel kleiner oder größer werden soll!) Mit den Argumenten $\triangle \gamma_{1,2}$ und s_2 und der dem Horsky'schen Diagramm entnommenen Verschiebung $p_2 = \frac{s_2}{\rho''} \triangle \gamma_{1,2}$ findet man auf dem anderen Winkelschenkel den analogen Punkt A_2 . Die Verbindungsgeraden $A_1 A_2$ ist der geometrische Ort aller Punkte, die mit P_1 und P_2 den Winkel $\gamma_{1,2}$ einschließen. Auf ähnliche Weise findet man für den Winkel $\gamma_{2,3}$ den geometrischen Ort $B_2 B_3$. Der Schnitt beider Geraden ist der gesuchte Punkt P_0 , dessen Koordinaten, auf eine der Richtungen z. B. $P'_0 P_2$ als Abszissenachse bezogen, im Diagramm-Maßstab 1:12·5 abgegriffen und in die Natur übertragen werden können. Die Praxis hat ergeben, daß diese Arbeiten, einschließlich der Winkelmessungen, in 20 Minuten erledigt sein können.

Ein ganz ähnliches Verfahren beschreibt Dietze 1914 in der Zeitschrift für Vermessungswesen. Der Unterschied gegen das Verfahren des österreichischen Katasters besteht darin, daß nicht die Abstände p_1 bis p_4 graphisch bestimmt werden, sondern daß gleich die Abschnitte $P'_0 A_1, P'_0 A_2$ usw. nach den nachstehenden Formeln rechnerisch bestimmt und die Punkte A_1, A_2, B_2 und B_3 (zur Kontrolle bestimmt Dietze auch für den ganzen Winkel $P_1 P'_0 P_3 = \gamma_{1,3}$ die Punkte C_1 und C_3) in der Natur abgesteckt und durch Pflöcke bezeichnet werden. Der Schnittpunkt der entsprechenden Pflocklinien gibt den gesuchten Punkt.

$$\left. \begin{aligned} P'_0 A_1 &= \frac{p_1}{\sin \gamma_{1,2}} = \frac{s_1}{\rho'' \sin \gamma_{1,2}} \triangle \gamma_{1,2}, & P'_0 A_2 &= \frac{p_2}{\sin \gamma_{1,2}} = \frac{s_2}{\rho'' \sin \gamma_{1,2}} \triangle \gamma_{1,2} \\ P'_0 B_2 &= \frac{p_3}{\sin \gamma_{2,3}} = \frac{s_2}{\rho'' \sin \gamma_{2,3}} \triangle \gamma_{2,3}, & P'_0 B_3 &= \frac{p_4}{\sin \gamma_{2,3}} = \frac{s_3}{\rho'' \sin \gamma_{2,3}} \triangle \gamma_{2,3} \end{aligned} \right\} . \quad 3)$$

Die praktische Durchführung des Verfahrens von Dietze dürfte, abgesehen davon, daß die Absteckungsarbeiten weniger übersichtlich und viel zeitraubender sind als die graphische Darstellung, auch deshalb mit manchen Schwierigkeiten verbunden sein, weil im Flachland die Notwendigkeit, die Kulturen zu schonen, oft das Schlagen von so vielen Pflöcken unmöglich machen wird, während im Gebirge vielfache Terrainschwierigkeiten im Wege stehen werden. Da andererseits das Verfahren des österreichischen Katasters Kenntnis des Horsky'schen Diagrammes voraussetzt, welches oftmals nicht zur Hand sein wird, so dürfte ein Vorgang vorteilhaft sein, welcher die Vorteile beider Verfahren vereint. Er besteht in folgendem (siehe Abb. 3):

In der Kanzlei trägt man die Winkel $\gamma_{1,2}$ und $\gamma_{2,3}$ auf und rechnet für die Abschnitte $P'_0 A_1, P'_0 A_2$ usw. jenen Faktor aus, der aus bekannten Größen

besteht. Also:

$$\frac{s_1}{\rho'' \sin \gamma_{1,2}} = a_1, \quad \frac{s_2}{\rho'' \sin \gamma_{1,2}} = a_2, \quad \frac{s_2}{\rho'' \sin \gamma_{2,3}} = b_2, \quad \frac{s_3}{\rho'' \sin \gamma_{2,3}} = b_3$$

$$\frac{s_1}{\rho'' \sin \gamma_{1,3}} = c_1 \text{ und } \frac{s_3}{\rho'' \sin \gamma_{1,3}} = c_3.$$

Auf dem Felde mißt man die Winkel $\gamma'_{1,2}$ und $\gamma'_{2,3}$ und braucht nur die einfachen Produkte $P'_0 A_1 = a_1 (\gamma_{1,2} - \gamma'_{1,2})$, $P'_0 A_2 = a_2 (\gamma_{1,2} - \gamma'_{1,2})$, $P'_0 B_2 = b_2 (\gamma_{2,3} - \gamma'_{2,3})$, $P'_0 B_3 = b_3 (\gamma_{2,3} - \gamma'_{2,3})$, $P'_0 C_1 = c_1 (\gamma_{1,3} - \gamma'_{1,3})$ und $P'_0 C_3 = c_3 (\gamma_{1,3} - \gamma'_{1,3})$ zu bilden und die errechneten Abstände in der graphischen Darstellung der Winkel aufzutragen. Die entsprechenden Verbindungslien schneiden sich dann im gesuchten Punkte, dessen Koordinaten in bezug auf die nächstliegende Visurlinie als Abszissenachse abgegriffen und in der Natur abgesteckt werden.

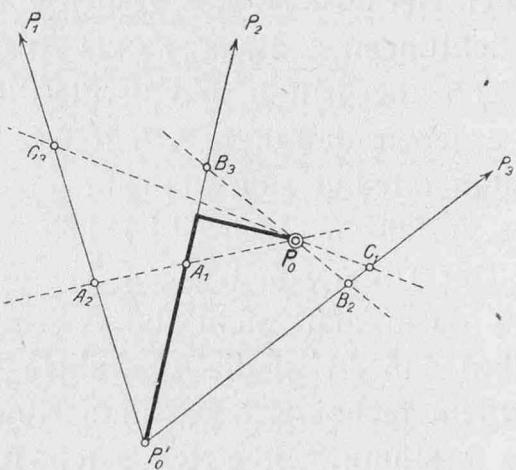


Fig. 3

Es kann vorkommen, daß die drei Verbindungslien sich nicht in einem Punkt schneiden, sondern ein kleines, fehlerzeigendes Dreieck bilden. Die Ursache hiefür liegt dann einerseits in den Näherungen der Formeln 3) und andererseits darin, daß die als Gerade angenommenen Verbindungslien $A_1 A_2$, $B_2 B_3$ und $C_1 C_3$ in Wirklichkeit Kreisbogen sind, die nur bei entsprechend langen Seitenlängen s durch gerade Linien ersetzt werden können. Thie behandelt diesen Fall eingehend im Jahrgang 1915 der Zeitschrift für Vermessungswesen und untersucht die Lage des gesuchten Punktes zu diesem Dreieck.

2. Lösungen nach dem Verfahren der trigonometrischen Punktbestimmung mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, wenn die Entfernung der anvisierten Punkte näherungsweise bekannt ist.

Diese Verfahren dienen für den Fall der Wiederherstellung eines vollständig verlorengegangenen, trigonometrisch bestimmten Punktes. Der Grundgedanke aller Verfahren ist, $\triangle x$ und $\triangle y$ aus den Gauß'schen Relationen

$$R_{0,i} - R'_{0,i} = \triangle R_{0,i} = a_i \triangle x + b_i \triangle y - z,$$

die für alle wiederbeobachteten Richtungen aufgestellt werden zu bestimmen. In den meisten Fällen begnügt man sich bei den Wiederherstellungsmessungen mit der Beobachtung der inneren Richtungen, denn die Messung der äußeren Richtungen erfordert gewöhnlich einen größeren Zeit- und Kostenaufwand, weil hiezu auch noch die Signalisierung der Anschlußpunkte notwendig ist.

Grundlegend für diese Verfahren ist das von F. G. Gauß in dem Buche: „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst“ bereits im Jahre 1875 veröffentlichte Verfahren. Es ist im Wesen das Problem des mehrfachen Rückwärtseinschneidens mit folgenden Vereinfachungen: Durch Verlegung des Koordinatenursprungs nach P'_0 ($x = 0, y = 0$) und der x -Achse in die Richtung nach einem der anvisierten Objekte wird erstens die Berechnung der Koordinaten des Näherungspunktes und zweitens die Berechnung der Richtungswinkel im Näherungspunkte erspart. Letzteres deshalb, weil die in P'_0 gemachten Beobachtungen mit den Richtungswinkeln identisch sind, wenn auf den in der x -Achse liegenden trigonometrischen Punkt die Nullrichtung eingestellt wird.

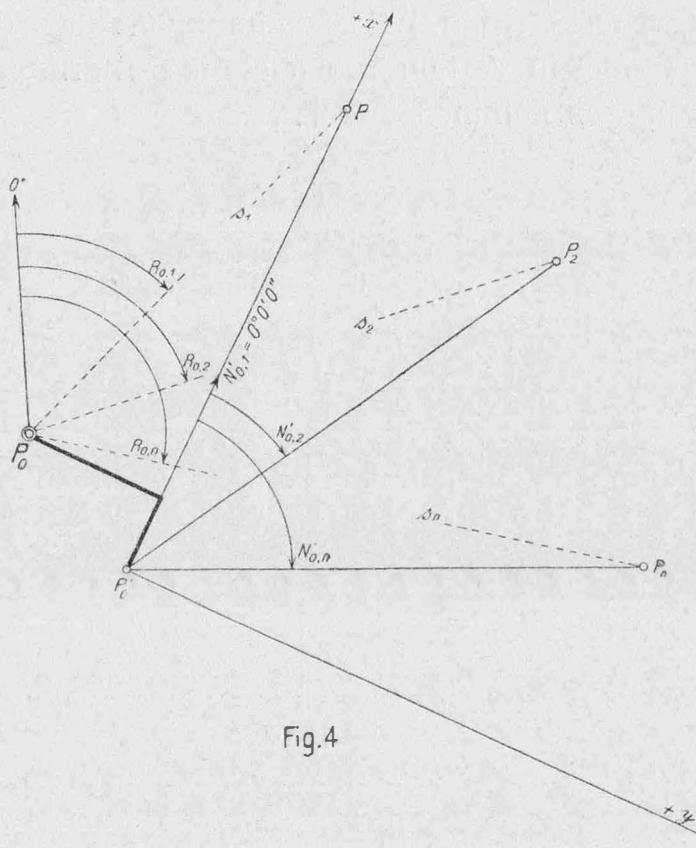


Fig. 4

Werden in Abb. 4 die Beobachtungen in P_0 mit $R_{0,i}$ bezeichnet (sie sind mit der Orientierungsunbekannten z behaftet) und die im Näherungspunkt P'_0 als Richtungswinkel mit $N'_{0,i}$, so lauten die Fehlergleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = a_1 \Delta x + b_1 \Delta y - z - w_1 \\ v_2 = a_2 \Delta x + b_2 \Delta y - z - w_2 \\ \vdots \\ v_n = a_n \Delta x + b_n \Delta y - z - w_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad .4)$$

Hierin sind $a_1 = \rho'' \frac{\sin N'_{0,1}}{s_1}$, $b_1 = -\rho'' \frac{\cos N'_{0,1}}{s_2}$ usw.

$$w_1 = R_{0,1} - N'_{0,1}, \quad w_2 = R_{0,2} - N'_{0,2} \text{ usw.}$$

Die Berechnung der wahrscheinlichsten Werte von Δx und Δy erfolgt nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen. Aus Δx und Δy ergeben sich die Zentrierungselemente

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ und } e = \frac{\Delta x}{\cos \varepsilon} = \frac{\Delta y}{\sin \varepsilon} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \dots . 5)$$

Die Zentrierung der auf P'_0 gemessenen Richtungen auf P_0 gibt den besten Überblick über die erzielte Genauigkeit. Sind im Anschluß an die Wiederherstellungsmessungen von P_0 Beobachtungen auf diesen Punkt durchzuführen, so wird man das Instrument nicht von P'_0 auf P_0 übertragen, sondern sämtliche Beobachtungen auf P'_0 machen und die Ergebnisse mit den erhobenen Zentrierungselementen auf P_0 zentrieren.

Vogg beschreibt im Jahrgang 1914 in der Zeitschrift des Vereines der Höheren bayerischen Vermessungsbeamten ein Verfahren zur Versicherung von trigonometrischen Punkten, welches darin besteht, daß markante Objekte (Türmchen usw.) anvisiert werden. Die Berechnung der Lage des aufzusuchenden Punktes erfolgt nach obigem Verfahren, wobei die Entfernung vom gesuchten Punkt aus der Mappe entnommen werden.

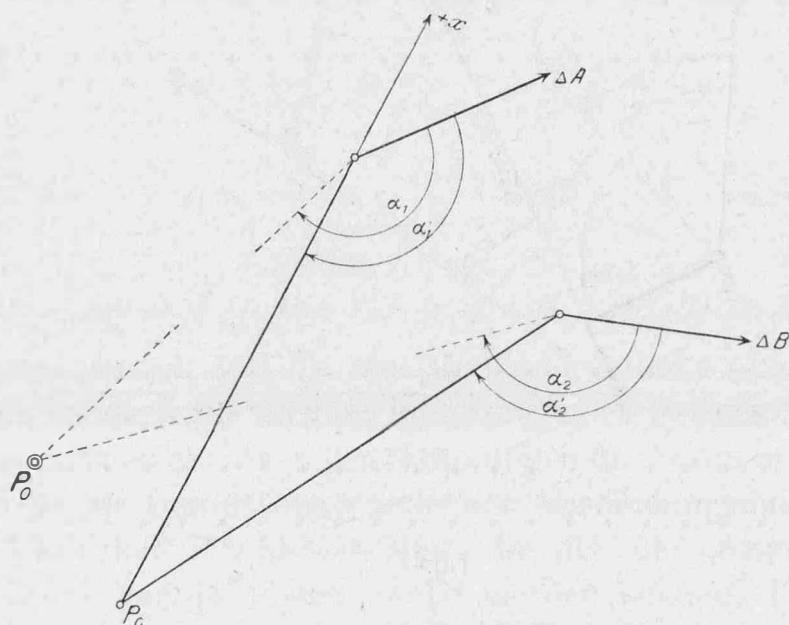


Fig. 5

Rau bringt im Jahre 1920 in der Zeitschrift für Vermessungswesen einige theoretische Ergänzungen zum Vogg'schen Artikel und erweitert ihn durch Einbeziehung der äußeren Richtungen. Wie aus obenstehender Abb. 5 ersichtlich ist, unterliegt die Einbeziehung der Fehlergleichungen für äußere Richtungen auch in dem Falle der willkürlichen Verlegung des Achsenystems nach P'_0 keinen Schwierigkeiten. Die Fehlergleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= a_1 \Delta x + b_1 \Delta y - l_1 \\ v'_2 &= a_2 \Delta x + b_2 \Delta y - l_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots . 6)$$

und werden im Falle des kombinierten Einschneidens mit den Fehlergleichungen 4) vereinigt. In diesen Gleichungen ist $l_1 = \alpha_1 - \alpha'_1$, $l_2 = \alpha_2 - \alpha'_2$ usw. Die Koeffizienten a und b sind identisch mit jenen der Gleichungen 4).

Ein Beispiel einer Wiederherstellung mit inneren und äußeren Richtungen bringt Blass bereits im Jahre 1900 in der Zeitschrift für Vermessungswesen.

Sehr häufig wird sich bei diesen Wiederherstellungsarbeiten, namentlich bei der von Grenzsteinen, die Notwendigkeit ergeben, die Berechnungen an Ort und Stelle durchzuführen. Dann wird es von größtem Nutzen sein, so viel als möglich an Rechenarbeit zu ersparen. Das früher beschriebene Gauß'sche Verfahren mit der Verlegung des Koordinatenursprungs nach P'_0 erspart die Berechnung der Näherungskoordinaten und der Richtungswinkel in P'_0 . Für die Aufstellung der Fehlergleichungen verbleibt dann nur mehr die Berechnung der Richtungskoeffizienten a und b und der Absolutglieder w . Während die letzteren als bloße Differenzen sehr rasch zu bilden sind, verursacht die am Felde vorzunehmende Berechnung der a und b immerhin einen in Betracht zu ziehenden Zeitaufwand.

Diese Berechnung ließe sich nun durch nachstehenden Rechnungsgang noch weiter vereinfachen, wobei auch die beiden Vorteile des Gauß'schen Verfahrens Verwertung finden. Das ursprüngliche Koordinatensystem wird beibehalten, P_0 für die Rechnung als Näherungspunkt und P'_0 als auszugleichender Punkt betrachtet. Man entnimmt den früheren Berechnungsprotokollen die bereits seinerzeit bei der Berechnung von P_0 verwendeten a und b und die orientierten Richtungen, letztere als Richtungswinkel im Näherungspunkt. Voraussetzung für die Verwendung der a und b ist, daß der Punkt P_0 bei der Ausgleichung keine zu großen Verschiebungen erfahren hat, sonst müßten die Richtungskoeffizienten neu gerechnet werden. Aber auch in diesem Fall könnte die Berechnung als Vorbereitungsarbeit in der Kanzlei durchgeführt werden und würde nicht auf Kosten der Feldarbeit gehen. Werden die orientierten Richtungen auf P_0 mit $N_{0,1}$, $N_{0,2}$, die beobachteten Richtungen auf P'_0 mit $R'_{0,1}$, $R'_{0,2}$ bezeichnet, so ist:

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = R'_{0,1} - N_{0,1} \\ w_2 = R'_{0,2} - N_{0,2} \\ \vdots \\ w_n = R'_{0,n} - N_{0,n} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 7)$$

Die Fehlergleichungen lauten:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = a_1 \triangle x + b_1 \triangle y - z - w_1 \\ v_2 = a_2 \triangle x + b_2 \triangle y - z - w_2 \\ \vdots \\ v_n = a_n \triangle x + b_n \triangle y - z - w_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 8)$$

Daraus ergeben sich nach Reduktion der a , b und w die Normalgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} /AA/\triangle x + /AB/\triangle y - /Aw/ = 0 \\ /AB/\triangle x + /BB/\triangle y - /Bw/ = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad 9)$$

darin bedeuten:

$$\begin{aligned} /AA/ &= /aa/ - \frac{|a||a|}{n}, \quad /AB/ = /ab/ - \frac{|a||b|}{n}, \quad /BB/ = /bb/ - \frac{|b||b|}{n} \\ /Aw/ &= /aw/ - \frac{|a||w|}{n}, \quad /Bw/ = /bw/ - \frac{|b||w|}{n}, \end{aligned}$$

und die gesuchten Größen sind:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle x = \frac{|BB||Aw| - |AB||Bw|}{|AA||BB| - |AB||AB|} \\ \triangle y = \frac{|AA||Bw| - |AB||Aw|}{|AA||BB| - |AB||AB|} \end{array} \right\} \quad \quad 10)$$

Nach der Berechnung der Koordinatenverschiebungen ist e und ε nach folgenden Formeln zu rechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \nu_{P_0 P'_0} &= \frac{\triangle y}{\triangle x}, & \operatorname{tg} \nu_{P'_0 P_1} &= \frac{y_1 - y'_0}{x_1 - x'_0} \\ \varepsilon &= \nu_{P'_0 P_0} - \nu_{P'_0 P_1}, & e &= \frac{\triangle y}{\sin \varepsilon} = \frac{\triangle x}{\cos \varepsilon} = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} \end{aligned} \quad \quad 11)$$

Zur Kontrolle werden die Richtungen von P'_0 auf P_0 zentriert.

3. Lösungen der Aufgabe, wenn die geodätische Lage oder die Entfernung der anvisierten Punkte unbekannt ist.

Die zum Aufsuchen von trigonometrischen Punkten dienenden Einmessungen beziehen sich auf benachbarte Besitzgrenzen, Grenzsteine und sonstige durch direktes Längenmessen zu erreichende Punkte. Gewöhnlich sind aber solche Hilfspunkte nicht zur Hand oder ändern in dem langen Zeitraum, für den ein trigonometrischer Punkt zu gelten hat, häufig ihre Lage. Deshalb hilft man sich öfters dadurch, daß man statt der linearen Sicherungsmaße Richtungen mißt. Man mißt die Richtungen nach mindestens drei markanten Objekten der Umgebung, wie Kirchturmspitzen, Blitzableiter, Türmchen, Fabriksschlote, Hausecken und ist, wenn man die Entferungen kennt, jederzeit in der Lage, den Punkt mit Hilfe eines der angegebenen Näherungsverfahren wieder aufzufinden.

Bischoff befaßt sich mit dieser Art der Versicherung von trigonometrischen Punkten in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1900.

Die notwendigen Entferungen wird man gewöhnlich mit genügender Genauigkeit aus der Katastralmappe entnehmen können. Es kann aber manchmal vorkommen, daß man nicht in der Lage ist, die Entferungen zu ermitteln, weil z. B. die Objekte in der Katastralmappe nicht vorkommen oder weil diese Mappen momentan nicht zur Verfügung stehen.

Morpugo zeigt nun in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1928, in höchst origineller Weise, wie man sich in einem solchen Falle helfen kann. Da die Näherungswerte nur zur Berechnung der Richtungskoeffizienten benötigt werden, ist Morpugo auf den Gedanken gekommen, anstatt die Richtungskoeffizienten zu rechnen — sie im Felde zu messen. Zu diesem Zwecke legt er durch den Näherungspunkt P'_0 ein beliebiges Achsenkreuz, trägt auf der positiven x - und y -Achse je 1 m auf und mißt in

den so erhaltenen Punkten P''_x und P'''_y sowie im Näherungspunkte P'_0 die Winkel nach den markanten Punkten.

Dann ist nach Abb. 6:

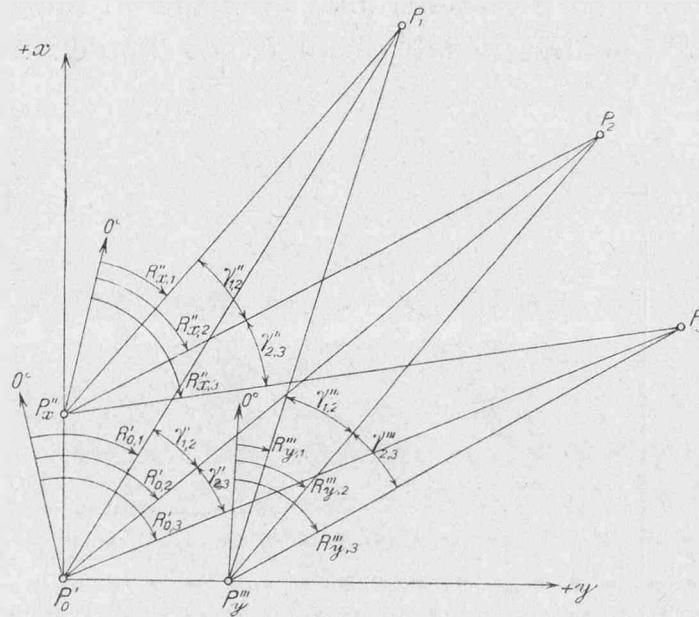


Fig. 6

$$\begin{aligned}
 R''_{x,1} - R'_{0,1} &= \triangle R'_{0,1} = a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 - z \\
 R''_{x,2} - R'_{0,2} &= \triangle R'_{0,2} = a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 - z \\
 (R''_{x,2} - R''_{x,1}) - (R'_{0,2} - R'_{0,1}) &= a_2 - a_1 \\
 \text{oder: } \gamma''_{1,2} - \gamma'_{1,2} &= a_2 - a_1 \\
 \text{ebenso ist: } \gamma'''_{1,2} - \gamma'_{1,2} &= b_2 - b_1 \\
 \gamma''_{2,3} - \gamma'_{2,3} &= a_3 - a_2 \\
 \gamma'''_{2,3} - \gamma'_{2,3} &= b_3 - b_2
 \end{aligned}$$

Damit sind die Koeffizienten in den Gauß'schen Relationen bekannt, welche, damit das z herausfällt, gleich für die Winkel $\gamma_{1,2}$ und $\gamma_{2,3}$ aufgestellt werden:

$$\left. \begin{aligned}
 (a_2 - a_1) \triangle x + (b_2 - b_1) \triangle y &= (\gamma_{1,2} - \gamma'_{1,2}) \\
 (a_3 - a_2) \triangle x + (b_3 - b_2) \triangle y &= (\gamma_{2,3} - \gamma'_{2,3})
 \end{aligned} \right\} \dots . 12)$$

Hieraus lassen sich $\triangle x$ und $\triangle y$ berechnen und in dem durch P'_0 gelegten Achsenkreuz abstecken.

Das Morpurgo'sche Verfahren, welches drei Instrumentaufstellungen benötigt, läßt sich noch etwas vereinfachen. Man kann nämlich eine Instrumentaufstellung ersparen, wenn man das in P'_0 beliebig zu wählende Achsenkreuz so legt, daß die x -Achse durch irgend ein gut pointierbares Objekt gekennzeichnet ist⁶⁾, und wenn man die einzelnen Richtungen mit der Einstellung 0° auf die

⁶⁾ Man darf jedoch nicht eines der anzuvisierenden Objekte P_1 bis P_2 als Richtungspunkt für die x -Achse wählen, weil sich sonst der b -Koeffizient für diesen Punkt nicht bestimmen ließe, weil sowohl a als $\operatorname{ctg} N'$ Null sind und b aus dem Ausdruck $b = a \cdot \operatorname{ctg} N'$ nicht rechenbar wäre. (Für diesen Fall wäre $b = \frac{\rho''}{s}$.)

x -Achse mißt, so daß man direkt die Richtungswinkel als Messungsergebnisse erhält. (Siehe Abb. 7.)

Werden nun diese Beobachtungen in P''_x , der auf der x -Achse 1 m vom Ursprung entfernt gelegen ist, wiederholt, so bekommt man aus der Differenz der auf P''_x und P'_0 gemessenen Richtungen direkt den a -Koeffizienten für jede Richtung.

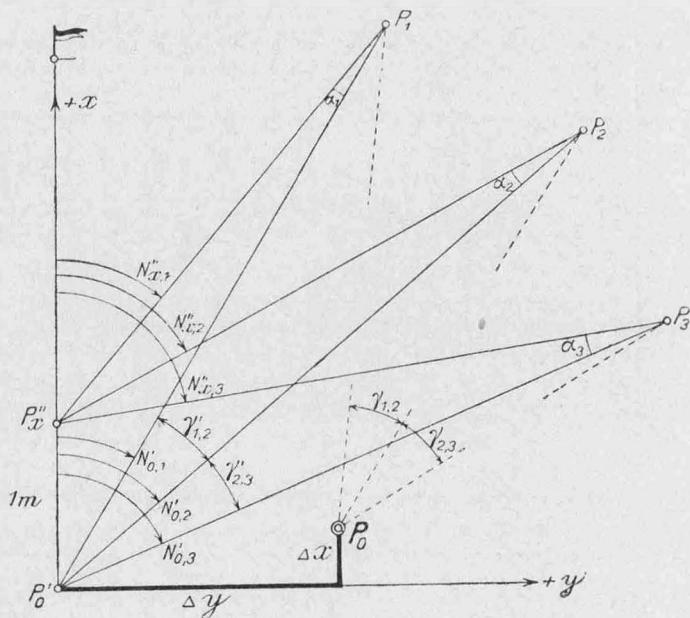


Fig. 7

$$\left. \begin{array}{l} N''_{x,1} - N'_{0,1} = a_1 \\ N''_{x,2} - N'_{0,2} = a_2 \\ N''_{x,3} - N'_{0,3} = a_3 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad .13)$$

Da zwischen dem a - und b -Koeffizienten die Beziehung besteht

$$b_i = -a_i \operatorname{ctg} N'_{0,i}$$

und da die Richtungswinkel N' durch direkte Messung bekannt sind, so können die b aus den a unmittelbar gerechnet werden:

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = -a_1 \operatorname{ctg} N'_{0,1} \\ b_2 = -a_2 \operatorname{ctg} N'_{0,2} \\ b_3 = -a_3 \operatorname{ctg} N'_{0,3} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad .14)$$

Damit können die Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten $\triangle x$ und $\triangle y$ (identisch mit den Gleichungen 12) aufgelöst werden:

$$\left. \begin{array}{l} (a_2 - a_1) \triangle x + (b_2 - b_1) \triangle y = (\gamma_{1,2} - \gamma'_{1,2}) \\ (a_3 - a_2) \triangle x + (b_3 - b_2) \triangle y = (\gamma_{2,3} - \gamma'_{2,3}) \end{array} \right\} \dots \dots \quad .15)$$

Nach erfolgter Berechnung werden $\triangle x$ und $\triangle y$ in dem durch P'_0 gelegten Achsenystem abgesteckt, worauf mit den Nachgrabungen nach dem gesuchten Punkt an dem durch die Absteckung erhaltenen Orte begonnen werden kann.

L i t e r a t u r ü b e r s i c h t:

Abkürzungen: Z. f. V. = Zeitschrift für Vermessungswesen.

Ö. Z. f. V. = Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen.

- 1875 Gauß: Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst. Verlag: E. Strien, Halle a. d. S., 3. Aufl. 1906.
- 1875 Vörländer: Über das Wiederfinden verlorener trigonometrischer Punkte. Z. f. V., 1875, Seite 81.
- 1900 Bischoff: Das Aufsuchen verlorener Signale. Z. f. V., 1900, Seite 25.
- 1900 Blaß: Wiederherstellung von Dreieckspunkten in Hessen. Z. f. V., 1900, Seite 341.
- 1905 Broch: Über die Aufsuchung trigonometrisch bestimmter Punkte, deren äußere Merkmale verloren gegangen oder nicht sichtbar sind. Ö. Z. f. V., 1905, Seite 25.
- 1914 Dietze: Aufsuchen von Dreieckspunkten. Z. f. V., 1914, Seite 425.
- 1914 Vogel: Einbinden mittels Winkelmessung. Zeitschrift des Vereines der Höheren bayerischen Vermessungsbeamten, 1914, Seite 82.
- 1915 Thiel: Aufsuchen von Dreieckspunkten. Z. f. V., 1915, Seite 153.
- 1920 Rau: Wiederherstellung verlorengegangener, durch Winkelmessung bestimmter Punkte. Z. f. V., 1920, Seite 456.
- 1928 Morpurgo: Die Rekonstruktion verlorengegangener Punkte. Ö. Z. f. V., 1928, Seite 25.

Grenzpunktberechnung und Ausschaltung grober Beobachtungsfehler im Strahlenmeßverfahren.

Von Ing. K. Levasseur, Wien.

(Nach dem am 26. November 1931 im „Österreichischen Verein für Vermessungswesen“ gehaltenen Vortrag erweitert wiedergegeben.)

Bei der Ermittlung der rechtwinkeligen Koordinaten y und x eines Grenzpunktes P durch Messung der Entferungen s_1 und s_2 sowie der orientierten Richtungen R_1 und R_2 in bezug auf zwei als fehlerfrei gegeben zu betrachtende Aufpunkte P_1 und P_2 (Winkelmeß- oder Bindepunkte) mit Hilfe des automatischen Reduktionstachymeters Boßhardt-Zeiss besteht eine doppelte Überbestimmung bezüglich der gesuchten Werte. Aus Abb. 1 folgen

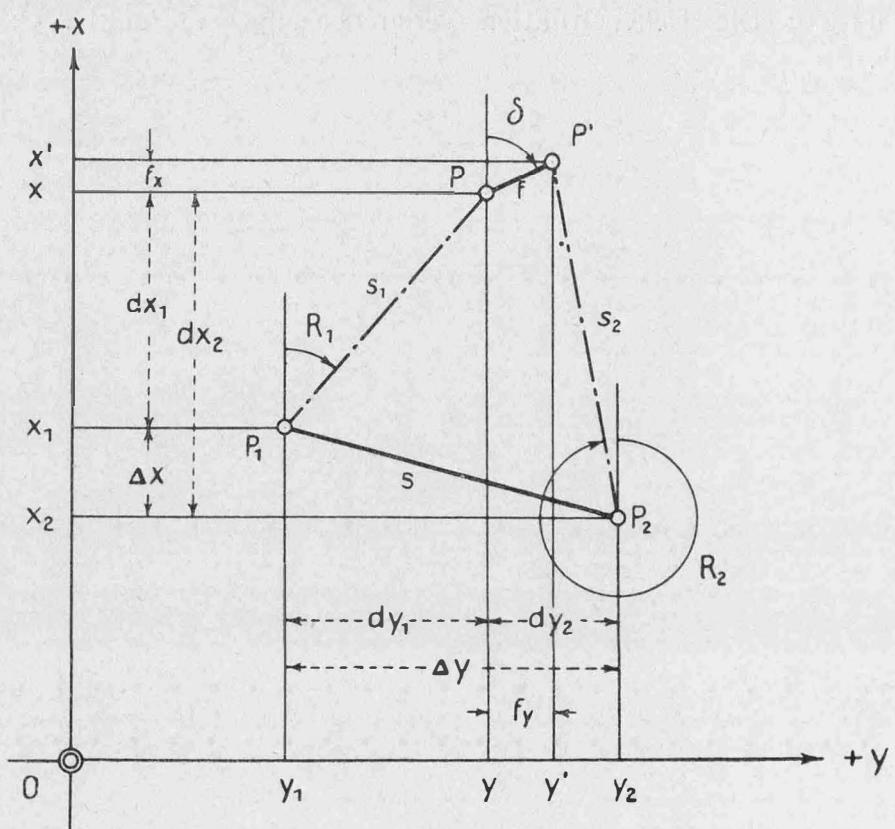


Abb. 1. Grenzpunktberechnung.

und

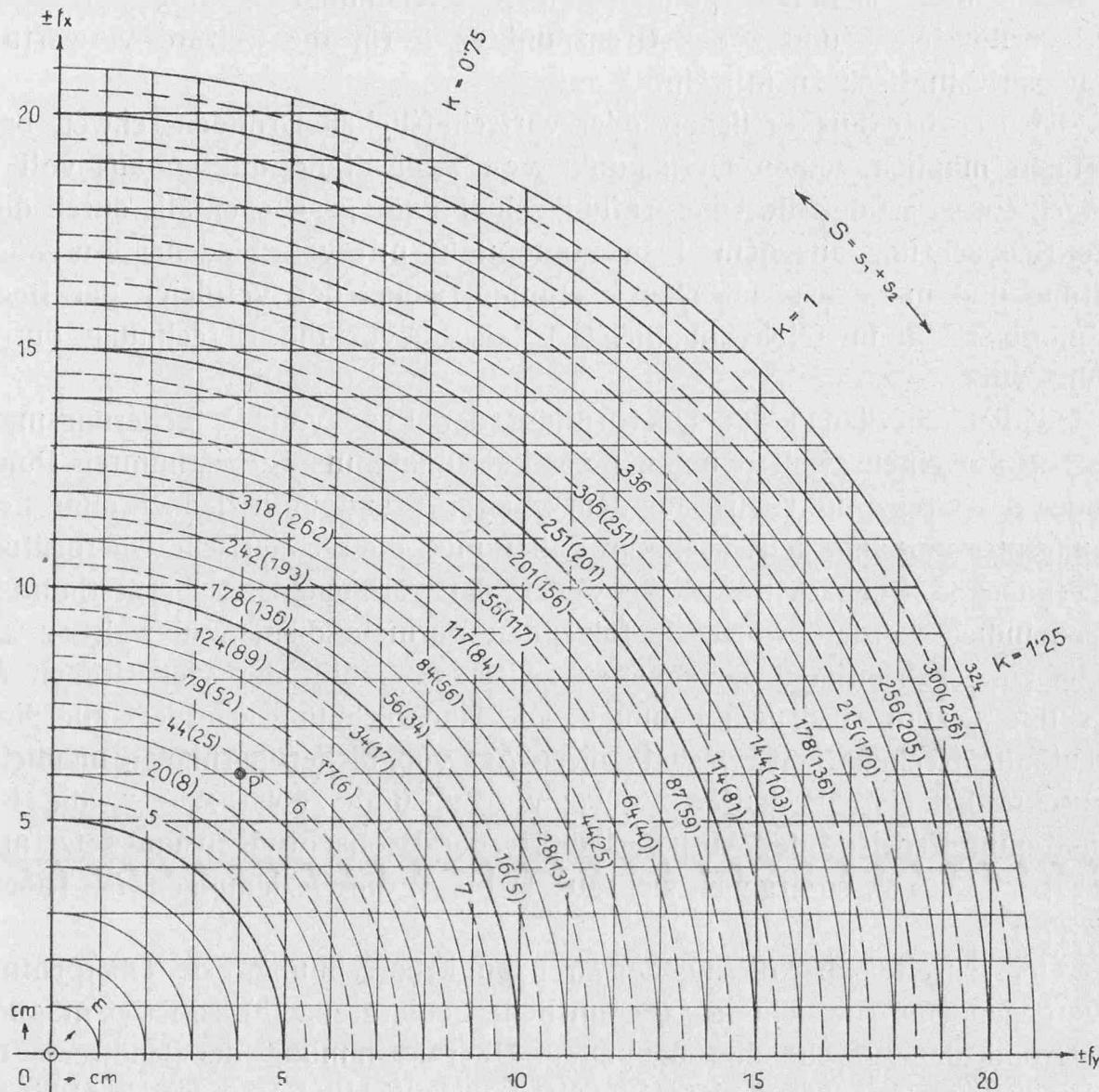
$$x' = x + f_x = x_2 + s_2 \cdot \cos R_2 = x_2 + d x_2. \dots \dots \dots 4).$$

Bei fehlerfreier Beobachtung müßten f_y und f_x verschwinden, so daß 1) = 3) und 2) = 4) werden würde.

In Österreich gilt für die Neuvermessung laut Dienstvorschrift Nr. 14 vom 7. Juli 1931 als Grenze für den zulässigen unvermeidlichen Fehler die Beziehung

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = k \cdot [0,006 \cdot \sqrt{S} + 0,06 (+ 0,01)] \dots 5),$$

alles in m , worin $S = s_1 + s_2$ die Summe der beiden gemessenen Strahlenlängen bedeutet und der eingeklammerte Wert ($+ 0,01$) dann einbezogen wird, wenn $s_i > 2 \cdot s_{i+1}$ ist, während k je nach den örtlichen Verhältnissen 0,75, 1,00 oder 1,25 beträgt.



$$f = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = k \cdot [0,006 \cdot \sqrt{S} + 0,06 (+ 0,01)]$$

für $s_i > 2s_{i+1}$

Abb. 2. Amtliche Fehlergrenzen.

Zur Überprüfung, ob die aus der Berechnung nach 1) bis 4) erhaltenen Werte um weniger, als die amtliche Fehlergrenze angibt, voneinander abweichen, diene das in Abb. 2 dargestellte Schaubild, in welchem zu jedem Wertepaar f_y und f_x an Hand der konzentrischen Kreise sowohl der Wurzel-

wert der linearen Abweichung f wie auch abgelesen werden kann, ob die amtliche Fehlergrenze eingehalten wurde oder nicht, je nachdem der Punkt P' (f_y, f_x) inner- oder außerhalb des zu S gehörigen Kreises liegt. Als Beispiel diene das aus Messungen unter mittleren Verhältnissen ($k = 1,00$) stammende Wertepaar $f_y = +4 \text{ cm}$ und $f_x = -6 \text{ cm}$ bei $s_1 = 86 \text{ m}$ und $s_2 = 51 \text{ m}$. Die lineare Abweichung — welche jedoch gar nicht zahlenmäßig abgelesen werden muß — beträgt sonach $f = 7,2 \text{ cm}$ und liegt innerhalb des Kreises für $S = 137 \text{ m}$, für welchen Wert ein Fehler von $f = 13,0 \text{ cm}$ zulässig ist. Somit wurde in diesem Falle die genannte Fehlergrenze eingehalten und es sind vorschriftsmäßig die aus den beiden voneinander unabhängigen Berechnungen gewonnenen Werte der Koordinaten y und x des Grenzpunktes P für die weitere Verwertung einfach arithmetisch zu mitteln.

Ist es aber aus örtlichen oder wirtschaftlichen Gründen schwer, bzw. gar nicht möglich, einen Grenzpunkt von zwei Standpunkten aus voll zu beobachten, so erfolgt die Überprüfung seiner Lage gegebenenfalls durch doppelte Beobachtung aus demselben Standpunkt mit verschiedener Ausgangsrichtung und möglichst zeitlicher Trennung, wobei der Vergleich der Beobachtungswerte unmittelbar möglich ist, also bevor die Berechnung durchgeführt wird.

Schließlich dienen zur Überprüfung der Lage von P Sicherungsmaße in bezug auf einen zweiten unabhängig koordinatenmäßig bestimmten Punkt P_2 oder der Grenzpunkt wird aus dem zweiten Standpunkt, jedoch ohne Entfernungsmessung angezielt. In diesen Fällen muß die rechnerische Überprüfung der erhobenen Beobachtungswerte wegen der vorhandenen Überbestimmung vorgenommen werden, wozu die folgenden Formeln dienen, in welchen alle möglichen gegenseitigen Beziehungen zwischen je drei der vier Größen R_1 , R_2 , s_1 und s_2 zum Ausdrucke kommen. Die Nachrechnung erfordert allerdings bedeutende Rechenarbeit, weshalb diese Art von Sicherungsmaßen möglichst einzuschränken ist. Bedeuten $\Delta y = y_2 - y_1$ und $\Delta x = x_2 - x_1$ die Koordinatenunterschiede der Ausgangspunkte der Beobachtungen und setzt man $\Delta y^2 + \Delta x^2 = s^2$, so ergeben sich aus 1) bis 4) die Beziehungen (s. Tabelle Seite 79):

Überschreitet aber die aus der Grenzpunktberechnung, bzw. Überprüfung hervorgegangene Abweichung f die amtliche Fehlergrenze 5), so ist es möglich, auf Grund der bestehenden doppelten Überbestimmung der Endwerte die Fehlerquelle auf bedeutend einfachere Weise als mit Hilfe der Formeln 6) bis 17) aufzufinden unter der grundlegenden, nachstehend begründeten Voraussetzung, daß nur eine der im allgemeinen vier voneinander unabhängigen Beobachtungen mit einem groben Fehler (neben den unvermeidlichen Fehlern und dem Einfluß des Standpunktkoordinatenausgleiches) behaftet ist. Unter der Annahme, daß auf $n = 1000$ Beobachtungen (Richtungs- und Streckenmessungen) beispielsweise $a = 3$ mit grobem Fehler entfallen — ist also die Wahrscheinlichkeit einer grob fehlerhaften Messung innerhalb einer Beobachtungsgruppe von vier Werten $w = 4 \cdot a : n = 12 : 1000 \doteq 1 : 83$, d. h. durchschnittlich ergibt sich auf 83 Grenzpunkte (= 332 Beobachtungen) 1 grober Fehler — beträgt die

Gegeben	gesucht
R_1, s_1	$R_2 = \arctg \frac{dy_1 - \Delta y}{dx_1 - \Delta x} + n \cdot \pi \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 6)$ $s_2 = + \sqrt{(dy_1 - \Delta y)^2 + (dx_1 - \Delta x)^2} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad 7)$
R_1, R_2	$s_1 = \left \frac{\Delta y \cdot \operatorname{ctg} R_2 - \Delta x}{\sin R_1 \cdot \operatorname{ctg} R_2 - \cos R_1} \right \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 8)$ $s_2 = \left \frac{\Delta y \cdot \operatorname{ctg} R_1 - \Delta x}{\cos R_2 - \sin R_2 \cdot \operatorname{ctg} R_1} \right \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 9)$
R_1, s_2	$R_2 = \arccos \left[\frac{\sin R_1 \cdot (\Delta y \cdot \cos R_1 - \Delta x \cdot \sin R_1)}{s_2} \pm \right. \\ \left. + \frac{\cos R_1 \cdot \sqrt{s_2^2 - (\Delta y \cdot \cos R_1 - \Delta x \cdot \sin R_1)^2}}{s_2} \right] + n \cdot \pi \quad 10)$ $s_1 = \left \sqrt{s_2^2 - s^2 + (\Delta y \cdot \sin R_1 + \Delta x \cdot \cos R_1)^2} + \right. \\ \left. + (\Delta y \cdot \sin R_1 + \Delta x \cdot \cos R_1) \right \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad 11)$
R_2, s_1	$R_1 = \arccos \left[\frac{-\sin R_2 \cdot (\Delta y \cdot \cos R_2 - \Delta x \cdot \sin R_2)}{s_1} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\cos R_2 \cdot \sqrt{s_1^2 - (\Delta y \cdot \cos R_2 - \Delta x \cdot \sin R_2)^2}}{s_1} \right] + n \cdot \pi \quad 12)$ $s_2 = \left \sqrt{s_1^2 - s^2 + (\Delta y \cdot \sin R_2 + \Delta x \cdot \cos R_2)^2} + \right. \\ \left. + (\Delta y \cdot \sin R_2 + \Delta x \cdot \cos R_2) \right \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad 13)$
R_2, s_2	$R_1 = \arctg \frac{dy_2 + \Delta y}{dx_2 + \Delta x} + n \cdot \pi \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 14)$ $s_1 = + \sqrt{(dy_2 + \Delta y)^2 + (dx_2 + \Delta x)^2} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad 15)$
s_1, s_2	$R_1 = \arcsin \left[\frac{\Delta y \cdot (s^2 + s_1^2 - s_2^2)}{2 \cdot s_1 \cdot s^2} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\Delta x \cdot \sqrt{4 \cdot s_1^2 \cdot s^2 - (s^2 + s_1^2 - s_2^2)^2}}{2 \cdot s_1 \cdot s^2} \right] + n \cdot \pi \quad \dots \dots \quad 16)$ $R_2 = \arcsin \left[\frac{\Delta y \cdot (s^2 - s_1^2 + s_2^2)}{2 \cdot s_2 \cdot s^2} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\Delta x \cdot \sqrt{4 \cdot s_2^2 \cdot s^2 - (s^2 - s_1^2 + s_2^2)^2}}{2 \cdot s_2 \cdot s^2} \right] + n \cdot \pi \quad \dots \dots \quad 17)$

Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier grober Fehler innerhalb einer Beobachtungsgruppe $w' = 12 \cdot a \cdot (a - 1) : n \cdot (n - 1) = 72:999.000 \doteq 1:14.000$ und somit die Wahrscheinlichkeit für das Nichtzutreffen der gemachten Voraus-

setzung $w'' = w' : w = 1 : 167$, weshalb die nachstehende äußerst einfache Nachprüfungsart praktisch stets vorzuziehen ist.

In den Gleichungen

$y = y_1 + (s_1 + \Delta s_1) \cdot \sin(R_1 + \Delta R_1) = y_2 + (s_2 + \Delta s_2) \cdot \sin(R_2 + \Delta R_2)$. 18)
und

$$x = x_1 + (s_1 + \Delta s_1) \cdot \cos(R_1 + \Delta R_1) = x_2 + (s_2 + \Delta s_2) \cdot \cos(R_2 + \Delta R_2) . \quad 19)$$

stellen $\triangle s_1$, $\triangle s_2$, $\triangle R_1$ und $\triangle R_2$ die Verbesserungen zu den groben Fehlern der einzelnen Beobachtungen dar, von denen jedoch gemäß der getroffenen Voraussetzung nur je einer innerhalb einer Beobachtungsgruppe auftritt, weshalb sich aus den allgemeinen Formeln 18) und 19) wegen 1) bis 4) folgende Beziehungen für die nunmehr aus dem groben Fehler und den unvermeidlichen Fehlern hervorgegangenen Fehler f_y und f_x ergeben:

$$\left. \begin{aligned} f_y &= \triangle s_1 \cdot \sin R_1 \text{ bzw.} \\ &= -\triangle s_2 \cdot \sin R_2 \text{ bzw.} \\ &= s_1 \cdot \cos R_1 \cdot \triangle R_1 \text{ bzw.} \\ &= -s_2 \cdot \cos R_2 \cdot \triangle R_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \quad 20)$$

und

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \triangle s_1 \cdot \cos R_1 \text{ bzw.} \\ &= -\triangle s_2 \cdot \cos R_2 \text{ bzw.} \\ &= -s_1 \cdot \sin R_1 \cdot \triangle R_1 \text{ bzw.} \\ &= s_2 \cdot \sin R_2 \cdot \triangle R_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad 21),$$

worin wegen der Kleinheit von $\triangle R$ stets $\cos \triangle R = 1$ und $\sin \triangle R = \operatorname{arc} \triangle R$ gesetzt wurde.

Den Kennwert für die weitere Untersuchung, welcher der vier groben Fehler $\pm \triangle s_1$, $\pm \triangle s_2$, $\pm \triangle R_1$ oder $\pm \triangle R_2$ vorliegt, bildet zweckmäßigerweise einer der echten Brüche

$$\frac{f_y}{f_x} = \operatorname{tg} \delta < 1 \text{ bzw. } \frac{f_x}{f_y} = \operatorname{ctg} \delta < 1 \dots \dots \dots \quad (22),$$

die sogenannte „Fehlertangente“, bzw. „— kotangente“ (Abb. 1), womit sich die in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen Vergleichswerte errechnen, welche sofort auf die fehlerhafte Beobachtung hinweisen. Praktisch genügt es, den Wert 22) mit Hilfe eines Rechenschiebers auf drei Dezimalstellen zu bestimmen und ihn mit den bereits aus der Kontrollrechnung der Grenzpunktberechnung nach der amtlichen österreichischen Drucksorte 46 (siehe Beispiele) vorhandenen Werten für $\operatorname{tg} R_1$, $\operatorname{tg} R_2$, bzw. $\operatorname{ctg} R_1$ und $\operatorname{ctg} R_2$ zu vergleichen. Hierbei kann der Unterschied zwischen $\operatorname{tg} \delta$, bzw. $\operatorname{ctg} \delta$ und den zu vergleichenden Funktionen

$$\left| \Delta \operatorname{tg} \delta \right| \leq \left| \frac{\partial \operatorname{tg} \delta}{\partial f_y} \cdot f_{y(\text{zul.})} \right| + \left| \frac{\partial \operatorname{tg} \delta}{\partial f_x} \cdot f_{x(\text{zul.})} \right| = \left| \frac{f_{y(\text{zul.})}}{f_x} \right| + \left| \frac{f_y \cdot f_{x(\text{zul.})}}{f_x^2} \right| = \\ = \left| \operatorname{tg} \delta \right| \cdot \left(\left| \frac{f_{y(\text{zul.})}}{f_y} \right| + \left| \frac{f_{x(\text{zul.})}}{f_x} \right| \right) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad . \quad 23)$$

betragen, welcher Ausdruck zur wesentlichen Vereinfachung jedoch näherungsweise durch

$$|\Delta \operatorname{tg} \delta| \leq |\operatorname{tg} \delta| \cdot \left(\left| \frac{0 \cdot 10}{f_y} \right| + \left| \frac{0 \cdot 10}{f_x} \right| \right) \dots \dots \dots 24),$$

alles in Metern, ersetzt werden darf, da die eingeführten Werte für f_y und f_x einem linearen Fehler $f_{(zul.)} = \pm 0 \cdot 14 \text{ m}$ ($S \doteq 100 \text{ m}$) entsprechen.

Δs_1	Δs_2	ΔR_1	ΔR_2	$\operatorname{tg} \delta \doteq$	$\operatorname{ctg} \delta \doteq$
≥ 0	0	0	0	$+ \operatorname{tg} R_1 = + \frac{dy_1}{dx_1}$	$+ \operatorname{ctg} R_1 = + \frac{dx_1}{dy_1}$
0	≥ 0	0	0	$+ \operatorname{tg} R_2 = + \frac{dy_2}{dx_2}$	$+ \operatorname{ctg} R_2 = + \frac{dx_2}{dy_2}$
0	0	≥ 0	0	$- \operatorname{ctg} R_1 = - \frac{dx_1}{dy_1}$	$- \operatorname{tg} R_1 = - \frac{dy_1}{dx_1}$
0	0	0	≥ 0	$- \operatorname{ctg} R_2 = - \frac{dx_2}{dy_2}$	$- \operatorname{tg} R_2 = - \frac{dy_2}{dx_2}$

Wurde auf diese Weise festgestellt, welche der vier Beobachtungen der vorliegenden Gruppe mit einem groben Fehler behaftet ist, so könnte hierauf dieser Fehler nach 6), 7), 14) oder 15) aus den beiden Gegenbeobachtungen streng, bzw. nach 20) oder 21) angenähert, aber praktisch hinreichend bestimmt werden, wobei sich sein Betrag im ersten Falle als Unterschied zwischen dem gemessenen und dem aus der Rechnung gewonnenen Wert der fehlerhaft gemessenen Größe und im anderen Falle unmittelbar ergibt; doch ist dieser Weg zumeist nicht allein zu empfehlen, da hiebei der grobe Fehler nicht vom Einfluß der unvermeidlichen getrennt wird.

Besteht dagegen keine der in der Tabelle angegebenen Übereinstimmungen von 22) mit dem Vergleichswert, so liegt, wenn es sich nicht etwa um eine falsche Zuordnung durch Grenzpunktnummernverwechslung, also überhaupt um nicht identische Punkte handelt, eben der seltene, wie oben errechnet, auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung unter der getroffenen Annahme von drei Fehlbeobachtungen unter 1000 Messungen nur bei jedem 3.500. Grenzpunkt eintretende Fall vor, daß nicht nur eine der Beobachtungen der Gruppe fehlerhaft ist, in welchem Falle eine Nachmessung oder die Ausschaltung der Beobachtungsgruppe für die weitere Verwertung einzutreten hat.

Die Trennung des groben Fehlers von dem durch die unvermeidlichen Fehler entstehenden, aber innerhalb der Fehlergrenze liegenden Fehleranteils erfolgt bei der Seitenmessung von der Überlegung ausgehend, daß praktisch — außer bei nicht eingerichteter Querlatte, wodurch stets ein zu großes s erhalten wird, was aber durch den Beobachter vermieden wird — Fehllesungen zumeist um runde Beträge erfolgen. Bei der optischen Entfernungsmessung nach Boßhardt-Zeiss kommen vor allem folgende Fehlbeobachtungen vor: $\Delta s = \pm 20 \text{ cm}, \pm 40 \text{ cm}, \pm 60 \text{ cm}, \pm 80 \text{ cm}$ (durch Teilstrichverwechslung oder Hinzufügung der Trommellesung zur unmittelbar beobachteten Meteranzahl bei Außerachtlassung der unmittelbar eingestellten Dezimeteranzahl), $\pm 1 \text{ m}, \pm 2 \text{ m}, \pm 10 \text{ m}$ (durch Teilstrichverwechslung), $+ 9 \text{ m}, + 18 \text{ m}$ (durch

Außerachtlassung der Verminderung um diese Werte bei Ablesung in bezug auf die Noniusmitte oder das Noniusende im Falle teilweise verdeckter Sicht), $\pm 40\text{ m}$ und $\pm 60\text{ m}$ (durch Vertauschung der Nonien und gleichzeitigem Ablesefehler um $\pm 100\text{ m}$).

Es wird daher nach den aus 20) und 21) hervorgehenden Formeln

$$\left. \begin{aligned} \triangle s_1 &= \frac{f_y}{\sin R_1} \text{ bzw.} \\ &= -\frac{f_x}{\cos R_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad \quad 25)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \triangle s_2 &= -\frac{f_y}{\sin R_2} \text{ bzw.} \\ &= -\frac{f_x}{\cos R_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad \quad 26)$$

die Verbesserung für die betreffende Entfernung samt ihrem Vorzeichen bestimmt, jedoch nur der nächstgelegene runde Wert eingeführt, wonach die nach der nunmehr wiederholten Grenzpunktberechnung gegenüber der zweiten Berechnungsgruppe verbleibenden Fehler eine innerhalb der amtlichen Fehlergrenze liegende lineare Abweichung f nach 5) ergeben müssen, wodurch der grobe Fehler auf rechnerischem Wege ausgeschaltet erscheint.

Wurde einer der Werte R_1 oder R_2 auf Grund der Tabelle als grob fehlerhaft befunden, so ist zu entscheiden, ob es sich um einen wieder runden Ablesefehler oder um einen naturgemäß unruenden Einstellfehler handelt, wozu noch die Fehlerquelle der Bildverwechslung kommt. Als runde Ablesefehler erscheinen besonders $\triangle R = \pm 20', \pm 40', \pm 1^{\circ}$ und $\pm 10^{\circ}$, während durch die Vertauschung des oberen (ungebrochenen, nicht verschobenen) Bildes mit dem unteren (gebrochenen, verschobenen) ein Richtungsfehler

$$\triangle R = + 0'0100 = + 0'01 \cdot \rho' = + 34'38 = + 34'23''$$

entsteht, welcher von der Entfernung des Ziels unabhängig ist. Die Größe der Richtungsverbesserung kann aus den ebenfalls aus 20) und 21) erhaltenen Formeln

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arc} \triangle R_1 &= -\frac{f_y}{dx_1} \text{ bzw.} \\ &= -\frac{f_x}{dy_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad \quad 27)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arc} \triangle R_2 &= -\frac{f_y}{dx_2} \text{ bzw.} \\ &= \frac{f_x}{dy_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad \quad 28)$$

samt dem Vorzeichen ermittelt werden, doch empfiehlt es sich, vorerst zu untersuchen, ob nicht ein runder Ablesefehler oder Bildverwechslung vorliegt, indem der Zahlenwert aus 27) oder 28) mit den folgenden Beträgen verglichen wird:

$$\begin{array}{lll} \triangle R = \pm 20' & . & 20': \rho' = \pm 0.00582 \\ = -34'4 & . & -0.01000 \\ = \pm 40' & . & 40': \rho' = \pm 0.01164 \\ = \pm 1^{\circ} & . & 1^{\circ}: \rho^0 = \pm 0.01745 \\ = \pm 10^{\circ} & . & 10^{\circ}: \rho^0 = \pm 0.17453 \end{array} \quad \left. \right\} \quad . . . \quad (29)$$

Die genäherte Übereinstimmung mit einem dieser Werte ist bereits der Hinweis, daß der dem Vergleichswert entsprechende Richtungsfehler vorliegt. Sowohl die Auswertung der Formeln 25) und 26) wie auch von 27) und 28) erfolgt hinreichend genau mit Hilfe eines Rechenschiebers, so daß sich die gesamte Fehlerermittlung auf zwei Rechenschieberoperationen beschränkt und somit äußerst rasch vorgenommen werden kann. Wie bei der Bestimmung eines Fehlers in der Entfernung muß auch hier nach der Ermittlung des Richtungsfehlers die Grenzpunktberechnung mit dem verbesserten Wert wiederholt werden, wonach der verbleibende Fehler innerhalb der amtlichen Fehlergrenze 5) liegen muß.

Das vorstehend hergeleitete, analytisch begründete und praktisch rasch zum Ziele führende Verfahren kann jedoch auch zeichnerisch durchgebildet werden, indem man in einen mit Gradteilung versehenen Kreis, z. B. in das Muster 23 für den „Graphischen Ausgleich“, die beiden aus der Grenzpunktberechnung bekannten Richtungen R_1 und $(R_2 \pm 180^\circ)$ als gerichtete Strahlen durch den Punkt P , welcher mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt, einträgt und die Senkrechten N_1 und N_2 zu R_1 und $(R_2 \pm 180^\circ)$ errichtet. Weiters trägt man die Abweichungen zwischen den beiden Grenzpunktberechnungen f_y und f_x unter Berücksichtigung ihres Vorzeichens in entsprechendem Maßstab auf, wodurch der Punkt P' erhalten wird (Abb. 3). Aus seiner Lage gegenüber R_1 , $(R_2 \pm 180^\circ)$, N_1 und N_2 wird auf die Art, Größe und das Vorzeichen der dem groben Fehler entsprechenden Verbesserung geschlossen. Hiebei sind wieder vier Fälle zu unterscheiden: Liegt P' nahe R_1 oder $(R_2 \pm 180^\circ)$, so handelt es sich um einen Fehler in der Entfernung s_1 , bzw. s_2 . Fällt P' in die Nähe von N_1 oder N_2 , so liegt ein Richtungsfehler vor (Abb. 4). Der zulässige Fehler kann durch einen Kreis mit dem Halbmesser f aus 5) um P dargestellt werden, innerhalb dessen P' nach Anbringung der ermittelten Verbesserung zu liegen kommen muß.

Eine Verbesserung $\triangle s_1$ oder $\triangle s_2$ kann sofort an Hand des Maßstabes abgelesen werden; hievon wird der nächstliegende runde Wert eingeführt. Das Maß der Richtungsverbesserung dagegen wird aus

$$\triangle R = \frac{q \cdot \rho'}{\varsigma} \dots \dots \dots \dots \quad 30)$$

bestimmt, wobei q die Verschwenkung darstellt, die durch die Senkrechte aus P' auf R_1 , bzw. ($R_2 \pm 180^\circ$) angegeben wird und mit Hilfe des Maßstabes abzulesen ist; ihr Vorzeichen, welches gleich dem Vorzeichen von $\triangle R$ ist, ergibt sich aus der Lage von P' , indem ein richtungsvergrößerndes q oder $\triangle R$ als positiv gezählt wird (Uhrzeigersinn = richtungsvergrößernd).

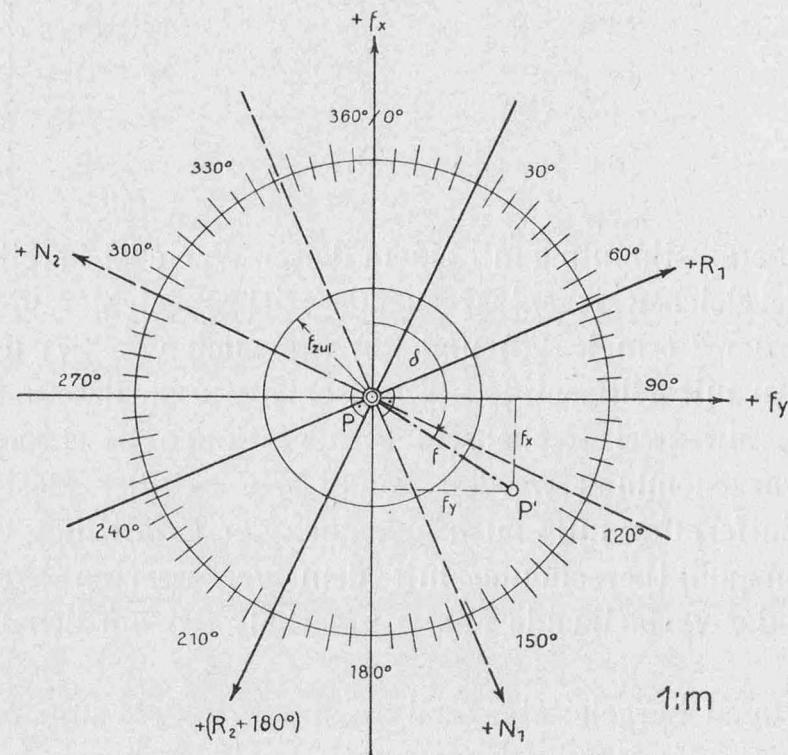
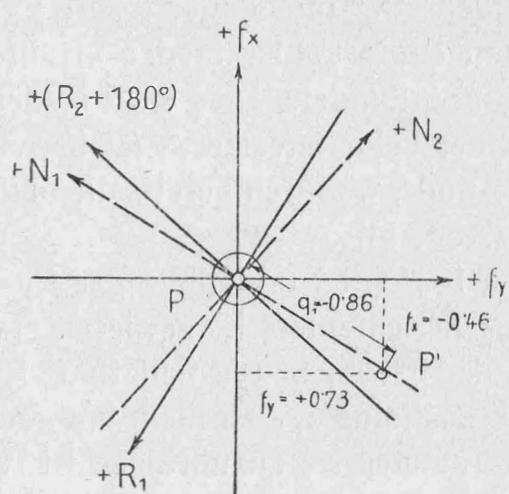
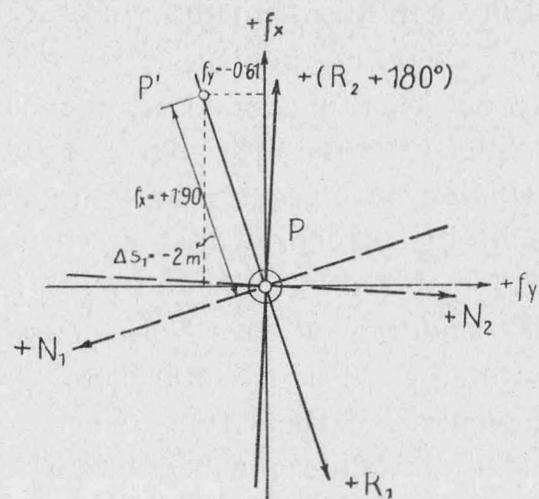


Abb. 3. Muster für die graphische Fehlerbestimmung.

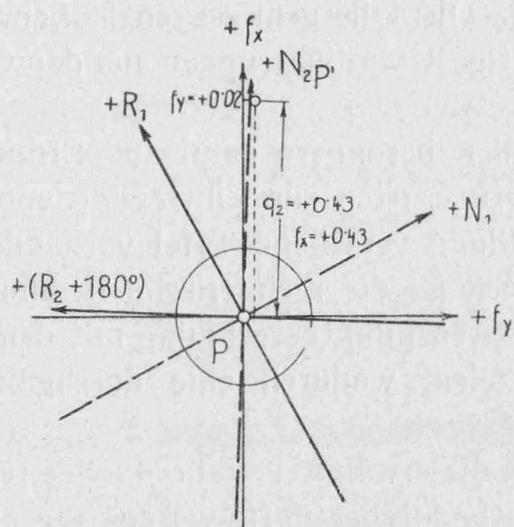
Beispiel Nr.	Standpunkt	Zeipunkt	Grenzpunktaufnahme			Berechnung	Grenzpunktberechnung									
			Genesene Richtung R_m		Entfernung s m m	Orientierung	S = S_x - S_y in mm	sin R_m	s = dy + dz s / (sin φ - cos φ)	Koordinaten und deren Unterschiede gegen den Senapunkt			Punkt Nr.	Fehler tg δ bzw. tg δ	Fehlerhafte Beobachtung und deren Verbesserung	
			F	L				cos R_m	dy / dx	dz / dy	y	z	dz / dx			
1	1278	11.041	00 15 15 2°	00 15 15 2°	0-359'59"	359°59'5	f_zul = 1229 m	1	0 51 58 0 85 67	198° 15 198° 15	-10 824 91 -10 867 99	+ 238 419 07 + 238 347 52	1278	f_y = +0.73	Fehler in R_y	
			00 03 0 15 2°	00 03 0 15 2°					2 37 25 31° 03'	-	+ 238 347 52 + 238 347 52	11.041	f_x = -0.46			
			00 03 0 15 2°	00 03 0 15 2°					0 75 55 0 65 52	-10 901 37 -10 867 26	+ 238 347 59 + 238 347 06	1279	tg δ = -0.830			
			130 56 5 45 07	130 56 5 45 07					1 30 56 0 2 41 07	0 50 97 0 86 19	-10 824 91 -10 867 26	+ 238 419 00 + 238 347 00	1278	-0.91 R_1		
2	1278	210 28 6 83 52	00 03 0 15 2°	00 03 0 15 2°	359°59'8	359°59'8	f_y = 0 f_x = -0.02	1.a	0 51 58 0 86 19	198° 15 198° 15	-10 824 91 -10 867 26	+ 238 419 07 + 238 347 52	1278	0.91 R_1	Δ R_y = Δ R_x = Gitter- netzab- rechnung	
			00 03 0 15 2°	00 03 0 15 2°					2 37 25 31° 03'	-	+ 238 347 52 + 238 347 52	11.041	-0.91 R_1			
			00 03 0 15 2°	00 03 0 15 2°					0 75 55 0 65 52	-10 901 37 -10 867 26	+ 238 347 59 + 238 347 06	1279	-0.91 R_1			
			130 56 5 45 07	130 56 5 45 07					1 30 56 0 2 41 07	0 50 97 0 86 19	-10 824 91 -10 867 26	+ 238 419 00 + 238 347 00	1278	-0.91 R_1		
2	1442	11.042	20 09 07 2°	20 09 07 2°	0°01'5	0°01'5	f_zul = 175 m	1	0 30 282 0 95 311	333° 11 333° 11	-10 912 63 -10 867 86	+ 238 199 79 + 238 030 79	11.042	f_y = -0.61	Fehler in S_y	
			162 21 6 107 99	162 21 6 107 99					2 25 57 3 47° 37'	-	+ 238 030 79 + 238 030 79	11.042	f_x = +1.90			
			00 21 21 2°	26 73 26 73					0 05 47 0 99 95	-10 867 86 -10 868 66	+ 238 059 37 + 238 032 69	11.042	tg δ = -0.322			
			183 04 2 107 99	183 04 2 107 99					0 05 42 3° 06'	-	+ 238 059 37 + 238 032 69	11.042	-0.91 R_1			
3	1442	11.280	00 03 0 15 2°	00 03 0 15 2°	0°01'5	0°01'5	f_y = 0 f_x = 0	1.a	0 30 282 0 95 311	329° 20 329° 20	-10 912 63 -10 867 86	+ 238 199 79 + 238 030 79	11.042	Δ S_y = $\frac{f_y}{f_x}$ Δ S_x = $\frac{f_x}{f_y}$ = -2.00	Fehler in R_y	
			162 21 6 107 99	162 21 6 107 99					2 25 57 3 47° 37'	-	+ 238 030 79 + 238 030 79	11.042	-0.91 R_1			
			331 01 0 22 92	331 01 0 22 92					0 05 47 0 99 95	-10 867 86 -10 868 66	+ 238 122 64 + 238 030 69	11.042	f_x = +1.90			
			92 00 01 21 2°	26 73 26 73					0 05 42 3° 06'	-	+ 238 122 64 + 238 030 69	11.042	tg δ = -0.322			
3	1441	11.041	00 03 0 15 2°	00 03 0 15 2°	359°57'9	359°57'9	f_y = +0.01 f_x = -0.04	2	0 30 282 0 95 311	329° 20 329° 20	-10 912 63 -10 867 86	+ 238 125 85 + 238 125 85	11.041	Δ S_y = $\frac{f_y}{f_x}$ Δ S_x = $\frac{f_x}{f_y}$ = +2.00	Fehler in R_y	
			21 2°	21 2°					2 03 37 88° 02'	-	+ 238 125 87 + 238 125 87	11.041	-0.91 R_2			
			92 00 01 21 2°	81 01 81 01					0 09 92 88° 02'	-	+ 238 125 87 + 238 125 87	11.041	-0.91 R_2			
			92 20 0 21 2°	81 01 81 01					0 09 92 88° 02'	-	+ 238 125 87 + 238 125 87	11.041	-0.91 R_2			
4	1442	11.281	20 09 07 2°	20 09 07 2°	0°00'8	0°00'8	f_zul = 91 m	1	0 48 35 0 87 53	59° 06 59° 06	-10 912 63 -10 867 86	+ 238 102 58 + 238 020 06	11.042	f_y = -0.02	Fehler in S_y	
			66 32 0 21 09	66 32 0 21 09					2 35 59 66° 33'	-	+ 238 122 64 + 238 020 06	11.042	f_x = -0.03			
			00 07 67 2°	00 07 67 2°					0 62 66 168° 72	-	+ 238 125 85 + 238 020 06	11.042	tg δ = -0.839			
			321 19 4 21 09	321 19 4 21 09					2 03 39 38° 49'	-	+ 238 125 85 + 238 020 06	11.042	-0.91 R_2			
4	1441	321 19 4 21 09	19 47 7 21 09	19 47 7 21 09	359°58'4	359°58'4	f_y = -0.01 f_x = -0.04	2	0 62 66 168° 72	167° 26 167° 26	-10 912 63 -10 867 86	+ 238 125 85 + 238 020 06	11.042	Δ S_y = $\frac{f_y}{f_x}$ Δ S_x = $\frac{f_x}{f_y}$ = -40.00	Fehler in R_y	
			321 19 4 21 09	321 19 4 21 09					2 03 39 38° 49'	-	+ 238 125 85 + 238 020 06	11.042	-0.91 R_2			
			321 19 4 21 09	69 73 69 73					0 62 66 168° 72	-	+ 238 125 85 + 238 020 06	11.042	-0.91 R_2			
			321 19 4 21 09	69 73 69 73					2 03 39 38° 49'	-	+ 238 125 85 + 238 020 06	11.042	-0.91 R_2			
5	1402	11.418	40 12 10 2°	40 12 10 2°	6°55'9	6°55'9	f_zul = 85 m	1	0 09 82 0 99 52	113° 02 113° 02	-10 736 80 -10 736 80	+ 238 040 50 + 238 040 50	1402	f_y = -0.22	Autonomer fall $R_2 = R_1 + 30^\circ$	
			178 42 2 31 20	178 42 2 31 20					2 03 34 5° 38'	-	+ 237 936 77 + 237 936 77	11.418	f_x = +0.03			
			218 35 6 31 20	218 35 6 31 20					0 98 87 66° 92	-	+ 237 982 13 + 237 982 13	1403	tg δ = -0.136			
			218 35 6 31 20	31 00					2 13 85 87° 23'	-	+ 237 985 80 + 237 985 80	11.418	$\Delta S_y = \frac{f_y}{f_x}$ $\Delta S_x = f_x$			
5	1403	218 35 6 31 20	20 18 18 2°	30 20 18 2°	0°00'9	f_y = -0.02 f_x = -0.04	f_zul = 85 m	2	0 98 87 66° 92	113° 02 113° 02	-30 65 -30 65	+ 237 986 77 + 237 986 77	11.418	$\Delta S_y = \frac{f_y}{f_x}$ $\Delta S_x = f_x$ Lösungswert		
			218 35 6 31 20	31 00					2 13 85 87° 23'	-	+ 237 986 77 + 237 986 77	11.418	$\Delta S_y = -0.0001$ $\Delta S_x = f_x + 14^\circ$			



Beispiel 1.

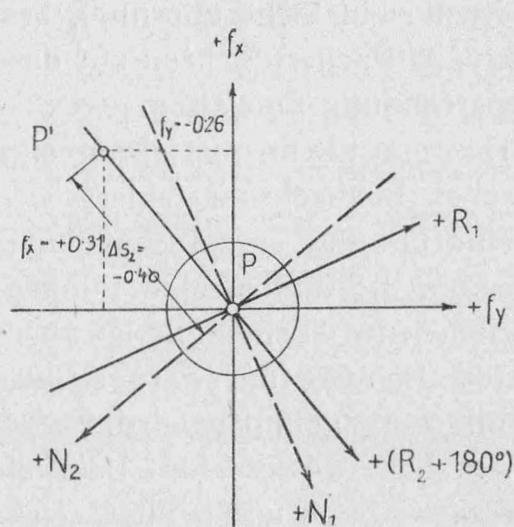


Beispiel 2.



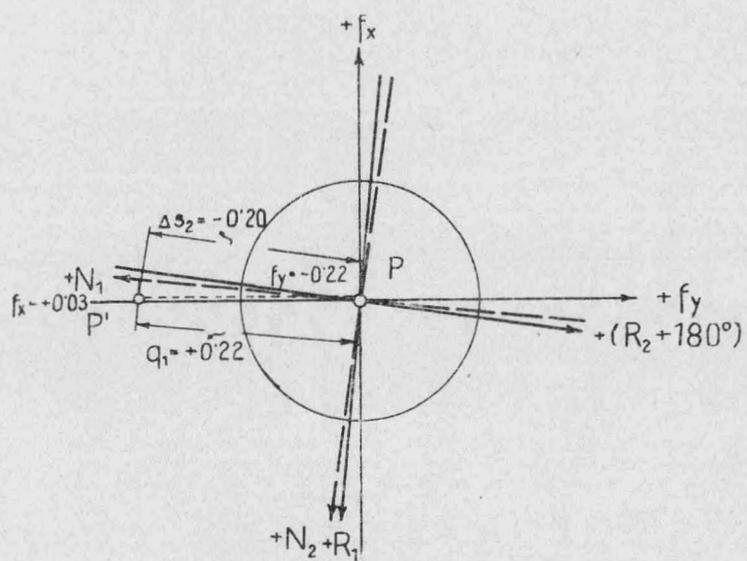
Beispiel 3.

Abb. 4.



Beispiel 4.

- Beispiel 1: Richtungsfehler in R_1 , Verbesserung $\Delta R_1 = -34'4$.
 Beispiel 2: Seitenfehler in s_1 Verbesserung $\Delta s_1 = -2 \text{ m}$.
 Beispiel 3: Richtungsfehler in R_2 , Verbesserung $\Delta R_2 = +20'$.
 Beispiel 4: Seitenfehler in s_2 , Verbesserung $\Delta s_2 = -0.40 \text{ m}$.

Abb. 5. Beispiel 5: Ausnahmefall $R_2 \doteq R_1 + 90^\circ$.

Für den Ausnahmefall, daß $R_2 \doteq R_1 \pm 90^\circ$ und daher $|\operatorname{tg} R_1| \doteq |\operatorname{ctg} R_2|$ wird, ist zu unterscheiden, ob es sich um einen Fehler in der Strahlenlänge oder in der Richtung der Gegenbeobachtung handelt. Dies wird in der Regel dadurch leicht ermöglicht, daß nur einer der beiden Werte ΔR_i , bzw. Δs_{i+1} einen runden Wert ergibt oder ihm nahekommt, wodurch bereits die fehlerhafte Beobachtung gekennzeichnet erscheint (Abb. 5).

Allein für den Fall, daß $R_1 \doteq R_2 \mp 180^\circ$ wird und $\operatorname{tg} \delta \doteq \operatorname{tg} R_1 \doteq \operatorname{tg} R_2$ ausfällt, wodurch auf das Vorliegen eines Seitenfehlers hingewiesen erscheint, gelangt man zur Entscheidung, daß eine der beiden Seiten fehlerhaft ist, kann jedoch wohl die Verbesserung $\Delta s_1 = \Delta s_2$ bestimmen, aber nicht unterscheiden, an welche der beiden beobachteten Entfernungen sie anzubringen ist, weshalb in diesem einzigen Ausnahmefalle trotz des Zutreffens der eingangs angenommenen Voraussetzung eine Nachmessung vorgenommen werden muß, sofern nicht irgend ein Sicherungsmaß, bzw. die allenfalls gemessenen Höhenwinkel bei nicht zu flachen Sichten auf das richtige Koordinatenpaar aus der Grenzpunktberechnung hinweisen.

Das graphische Verfahren eignet sich besonders dann zur Ermittlung des groben Beobachtungsfehlers, wenn Drucksorten zur Eintragung vorliegen oder eine mit der entsprechenden Einteilung versehene Tafel vorhanden ist (nach Abb. 3); für einzelne Punkte jedoch ist die rechnerische Bestimmung vorzuziehen. In jedem Falle ist aber die Grenzpunktberechnung mit dem verbesserten Beobachtungswert zu wiederholen, wodurch eine durchgreifende Kontrolle vorgenommen wird.

Auf Seite 84 sind fünf Beispiele für die erwähnten Fälle durchgerechnet und in den Abb. 4 und 5 auch zeichnerisch durchgeführt, woraus die praktische Anwendung der entwickelten Ausschaltung grober Beobachtungsfehler auf Grund überschüssiger Messungen im Strahlenmeßverfahren hervorgeht.

Eine Denkmalsaufnahme durch Einfache Bildmessung.

Von Professor Ing. Dr. techn. H. Löschnér, Brünn.

Die im nachfolgenden gegebenen Mitteilungen über eine im Sommer 1914 — kurz vor dem Kriege — ausgeführte Aufnahme des damals vor dem Deutschen Hause in Brünn bestandenen großen Denkmals dürften nicht nur historisches Interesse, sondern mit Rücksicht auf die angewendeten Verfeinerungsmaßnahmen und die erzielten Genauigkeitsergebnisse noch etwas weitergehendes Interesse erwecken, umso mehr, als die Einfache Bildmessung zwar bei Gelände-aufnahmen kaum mehr in Frage kommt, wohl aber noch bei der Aufnahme von Baudenkmälern — wenigstens unter gewissen Umständen —, namentlich wenn nur einfachere Hilfsmittel für die Aufnahme und für die Auswertung derselben zur Verfügung stehen.

Daß die jüngere Stereophotogrammetrie auch bei der Aufnahme von Baudenkmälern ihre Vorteile haben kann, ist bekannt und braucht hier nicht weiter ausgeführt zu werden¹⁾. Dies ändert nichts an der Tatsache, daß man bei durchwegs leichter, guter Identifizierung korrespondierender Punkte in manchen Fällen nach wie vor auch mit einfachen Hilfsmitteln das Auslangen finden kann, umso mehr, als bei den meist sehr geringen Aufnahmedistanzen eine recht hohe absolute Genauigkeit der Lage- und Höhenbestimmung erreichbar ist²⁾.

Das am 2. Juni 1914 von mir benutzte Instrument ist ein alter, aber gut gebauter Phototheodolit von Starke & Kammerer, wie ihn Hofrat Prof. Doktor Doležal in seinem Hand- und Lehrbuch Bd. II eingehend beschreibt³⁾. Das Objektiv ist ein Zeiss-Anastigmat (1:18); die Bildweite betrug für alle Aufnahmen $f = 213\cdot48$ mm. Das Plattenformat ist 21×27 cm. Als Aufnahmszeiten kamen verschiedene, gelegentlich der Rekognoszierung mit Rücksicht auf den Sonnenstand festgesetzte Tageszeiten in Betracht.

Die Grundlage der photogrammetrischen Aufnahme bildete ein um das Denkmal herum geführter geschlossener Polygonzug von der Form eines Sechseckes mit mehreren Diagonalvisuren. Die 'Polygonpunkte' konnten dabei so gewählt werden, daß sie gleichzeitig als Photogrammeter-Standpunkte dienten. Die Seiten dieses Sechseckes wurden mit geeichtem Fein-Stahlmeßband hin- und zurückgemessen; ihre nach dem Ergebnis eines Doppel-Nivellements auf

¹⁾ Vgl. Hübl, „Wiener Bauhütte“, I., 1907, S. 590 ff.; Schwidetski, „Bildmessung und Luftbildwesen“, 1931, S. 154 ff.

²⁾ Über die erreichte Genauigkeit der Lage- und Höhenbestimmung bei Gelände-Aufnahmen durch Einfache Bildmessung (auf größere Entfernung) finden sich Literaturangaben über relative Fehler von Koppe, Finsterwalder, Hübl, Korzer (vgl. Löschnér, Erdbildmessung, 1930, S. 187 ff. und Hugershoff, Photogrammetrie, 1930, S. 210). Hingegen sind aus der Praxis abgeleitete Angaben über relative oder absolute Fehler bei Denkmal-aufnahmen durch Einfache Bildmessung (auf geringe Distanz) nicht bekannt geworden.

³⁾ Vgl. auch Löschnér's Erdbildmessung, S. 62.

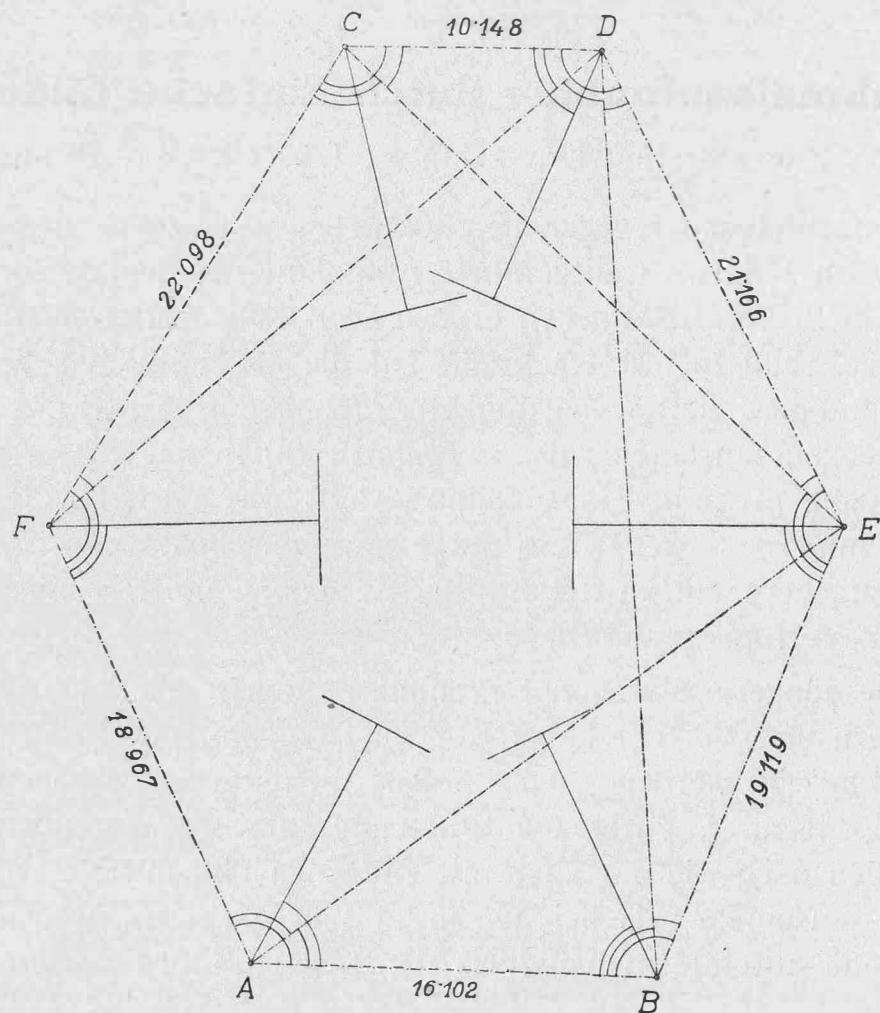


Abb. 1.

den Horizont reduzierten Längen waren: $\overline{AF} = 18 \cdot 967$ m, $\overline{FC} = 22 \cdot 098$ m, $\overline{CD} = 10 \cdot 148$ m, $\overline{DE} = 21 \cdot 166$ m, $\overline{EB} = 19 \cdot 119$ m, $\overline{BA} = 16 \cdot 102$ m. Die Winkel, 19 an der Zahl, wurden mit Hilfe eines Theodolits von $20''$ Noniusangabe durch Einfache Winkelmessung (mit Ablesen an zwei Nonien und Durchschlagen des Fernrohres) bestimmt, wobei wegen der Kürze der Visuren auf scharfe Zentrierung und Signalisierung besonders Bedacht zu nehmen war. Zur Vermarkung wurden bis zur Bodengleiche eingetriebene Gasrohrabschnitte, teilweise auch Pflöcke mit eingesetztem Röhrchen, verwendet. Die Signalisierung geschah mittels dünner Zentrierstifte⁴⁾. Für das geschlossene Polygon ergab sich ein Winkelwiderspruch von $2' 07 \cdot 5''$, woraus auf eine durchschnittliche Winkelverbesserung von $21''$ geschlossen werden kann.

Soferne solche signalisierte Polygonpunkte auch auf der photographischen Platte abgebildet sein können, sind sie noch als Paßpunkte verwertbar. Im übrigen ist es zweckmäßig, für jede photographische Aufnahme ein, zwei, drei scharf hervortretende Punkte des aufgenommenen Bauwerkes als Paßpunkte zur Prüfung der äußeren Orientierung der Kammer im Augenblick der Aufnahme festzulegen. Die Auswahl solcher Paßpunkte geschieht am besten nach erfolgter photographischer Aufnahme durch Einsichtnahme in die Platten.

⁴⁾ Löschner in „Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen“, 1909, S. 170.

Gelegentlich der Rekognoszierung hatte sich nun gezeigt, daß mehrere vertikale Kanten des teils eintönig weißen, teils eintönig wettergeschwärzten Sockelaufbaues nicht deutlich sichtbar waren. Um eine scharfe Abbildung dieser Kanten zu erhalten, mußten sie während der photographischen Aufnahme signalisiert sein. Diese Signalisierung durfte natürlich nur vorübergehend und ohne irgendwelchen Nachteil für das Denkmal ausgeführt werden. Ich verwendete 12 cm lange, 3 cm breite weiße oder schwarze Papierstreifen, die mittels schmaler Heftpflaster-Streifchen an die betreffenden Kanten festgehalten wurden. Dies hat sich bestens bewährt. Allerdings erscheint es für die Auswertung noch zweckmäßiger, an Stelle der Papierabschnitte von rechteckiger, solche von dreieckiger Gestalt derart anzuwenden, daß eine Seite des Dreieckes die zu bezeichnende Kante angibt, während die Spitze des Dreieckes von dieser Kante abgekehrt ist.

Von den sechs Aufnahmen aus den sechs Standpunkten sind zwei Aufnahmen in den Abbildungen 2 und 3 wiedergegeben.

Zur Auswertung der Aufnahmen.

Das Polygonzugnetz wurde ausgeglichen, und zwar unter Trennung von Winkel- und Seitenausgleichung.

Als Maßverhältnis für die Konstruktion des Grundrisses wurde 1:75 gewählt.

Das direkte Auftragen des Polygonzugnetzes mit Hilfe eines Metalltransporteurs und durch Parallel-Schieben der Seitenrichtungen hat bei meinen Versuchen, trotz aller Sorgfalt, in dem verhältnismäßig großen Maßstab nicht genügend befriedigende Ergebnisse geliefert. Desgleichen hat mich beim Einzeichnen der Aufnahmsrichtungen das Auftragen der Orientierungswinkel mit Transporteur nicht befriedigt⁵⁾. Die Polygonpunkte wurden daher nach rechtwinkligen Koordinaten berechnet und aufgetragen. Die geringe Mehrarbeit lohnt sich unbedingt, denn das grundlegende Punktnetz erhält bei so großem Maßverhältnis nur durch Berechnen und Auftragen nach Koordinaten die notwendige Sicherheit und Schärfe, und nur auf solche Art kann ein gutes Übereinstimmen von Kontrollen bei der Rekonstruktion des Details erwartet werden. Auch die Bild-Hauptpunkte habe ich nach Koordinaten berechnet und aufgetragen, was sich gleichfalls für scharfe Konstruktionen in großem Maßverhältnis als vorteilhaft erwiesen hat. Dabei war zu berücksichtigen, daß das Zentrum der Perspektive (also der Mittelpunkt des Objektivs) bei dem verwendeten Phototheodolit 11·5 cm von der Stehachse absteht, was in dem Maßverhältnis 1:75 die schon sehr merkliche Strecke von 1·53 mm ergibt.

Der rechte Winkel, den die Bildtrasse mit der Aufnahmsrichtung einschließt, wurde mit Hilfe eines Zirkels konstruiert.

⁵⁾ Meydenbauer hat für die meisten Fälle der Architekturaufnahmen das Auftragen des Polygonzuges mit dem Transporteur und mit Parallel-Schieben („Abschieben“) der Seitenrichtungen empfohlen, um Rechnungen auszuweichen. (Meydenbauer's Handbuch der Meßbildkunst, 1912, S. 214 f.)



Abb. 2.



Abb. 3.

Ein Plattenausmesser stand mir damals (1914) noch nicht zur Verfügung. Die Übertragung der Abstände auf der Bildtrasse erfolgte mit Hilfe eines gut durchsichtigen Pauspapiers, auf dem das Achsenkreuz mit Tusch fein eingezeichnet war und auf dem die zu übertragenden Punkte sorgfältig gekennzeichnet wurden. Die Maßentnahme kann bekanntlich entweder aus ungetonten Papierpositiven erfolgen oder unmittelbar aus dem Glasnegativ. Ich habe beides erprobt und in diesem Falle vorgezogen, die Glasnegative vorsichtigst zu benützen. Dabei wurde die Vertikallinie des Pauspapiers über die Vertikalmarken des Glasnegativs gesetzt und die Lage der Bildpunkte (z. B. der Kanten des Postamentes auf dem Photogramm) durch feine Strichmarken gekennzeichnet (Abb. 4).

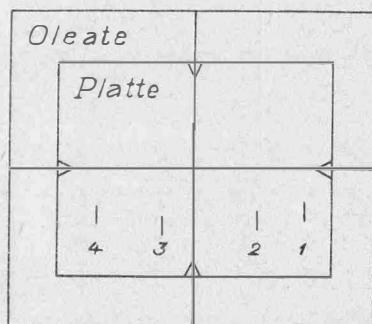


Abb. 4.

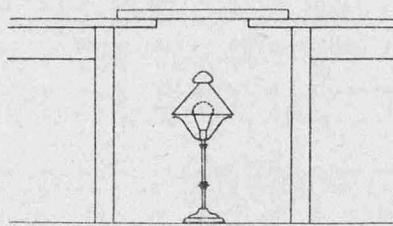


Abb. 5.

Um die Entnahme der Strichmarken vom Negativ an den trüben Tagen und Abenden des Herbstes ausführen zu können, war eine künstliche gleichmäßige Durchleuchtung des Glasnegativs erforderlich. Zu diesem Zwecke wurden zwei Zeichentische so nahe aneinander geschoben, daß ein Zwischenraum von der Breite des Glasnegativs übrig blieb. Auf die beiderseitigen Tischränder wurde ein Vorlagerahmen aufgelegt, über dessen Glasplatte das jeweils zu bearbeitende Glasnegativ und das Pauspapier mit Strichkreuz zu liegen kamen. Die gleichmäßige Durchleuchtung erfolgte mit Hilfe einer auf den Boden gestellten elektrischen Lampe mit aufgesetztem Metallglas-Schirm (Abb. 5).

Bei der Übertragung der Strichmarken auf die Bildtrasse mußte die Oleate natürlich gewendet werden, da die Bildtrasse zweckmäßigerweise auf der Positivseite des Zentrums der Perspektive gezeichnet war und somit die auf dem Negativ links von der Hauptvertikalen gelegenen Bildpunkte auf der Bildtrasse rechts von der Aufnahmsrichtung aufzutragen waren. (Abb. 6).

Die Bildpunkte auf der Bildtrasse wurden fein gestochen. Die zur Konstruktion des Grundrisses erforderlichen Punktstrahlen wurden mit Metall-Lineal (Noniusmaßstab) und flach gespitztem Bleistift gezogen. Bei der Konstruktion des Postament-Grundrisses haben sich die Eckpunkte durchwegs aus dem einwandfrei scharfen Schnitt von drei, teilweise sogar vier Strahlen ergeben (Abb. 7).

Im nachfolgenden wird eine Gegenüberstellung von Grundriß-Maßen gegeben, die ich einerseits durch direkte Messungen am Denkmal ermittelt, andererseits aus dem photogrammetrisch entwickelten Plane mit Hilfe von Spizzirkel, Lupe und gezeichnetem Transversalmaßstab (1 : 75) entnommen habe. (Siehe Tabelle I, S. 93.)

Die sich ergebenden Differenzen sind wohl praktisch belanglos. Selbstverständlich hängt die Sicherheit und Genauigkeit der Bestimmung von Längenmaßen in erster Linie von der Schärfe der Bildpunkte ab, die diese Längenmaße

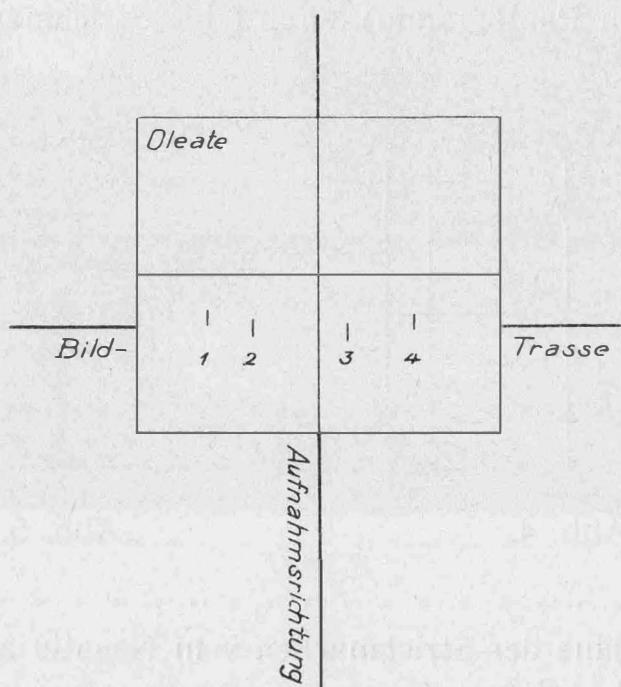


Abb. 6.

begrenzen. Die Verwendung der mittels Klebestreifen auf dem Marmor befestigten weißen (gegebenenfalls schwarzen) Papierstreifen hat sich sehr gut bewährt. Bei Ermittlung der Durchmesser für die Spiralwindungen auf der Oberfläche der Stufenwangen mit Hilfe von Tangentialstrahlen waren wegen mangelhafter Deutlichkeit der Begrenzung im Photogramm weniger gute Ergebnisse zu erwarten. Mit Hilfe von Tangentialstrahlen wurde auch der Umriß (Umfang) der Buchsbäumchen („Kugelbäume“) am Rande der Grünanlage um das Monument bestimmt, wobei eine größere Genauigkeit überhaupt belanglos erscheint. Bemerkt sei hier aber, daß die photogrammetrische Aufnahme selbst mit einfachen Hilfsmitteln im Vorteile ist gegenüber der direkten Messung bei Untersuchung der Art des Wachstums und etwaiger Veränderungen in Form und Umfang von krummlinig begrenzten Gewächsformen durch wiederholte Aufnahme nach größeren Zwischenzeiten, was speziell für den Pflanzenzüchter und Botaniker von Bedeutung sein kann.

Die photogrammetrische Ermittlung der Höhe einzelner Punkte erfolgte nach der bekannten Formel

$$\pm h = \pm y \frac{D}{d} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 1)$$

(Tabelle I.)
Vergleichsmaße aus dem Grundriß.

Vergleichsmaß	aus dem photogrammetrisch erhaltenen Plan		Die Direkte Messung am Denkmal ergab:	Differenz
	dreimal abgegriffen	im Mittel		
Stufenlänge	2·90 2·90 2·89	2·90	2·87	-3
Innenbreite des Postamentes	1·47 1·48 1·48	1·48	1·47	-1
Pfeilerbreite an den Ecken des Postamentes	0·87 0·87 0·86	0·87	0·87	0
Pfeilertiefe	0·42 0·43 0·42	0·42	0·42	0
Breite der oberen Stufe . .	0·36 0·37 0·38	0·37	0·38	+1
Breite der unteren Stufe . .	0·35 0·35 0·36	0·35	0·34 ₅	0
Sockellänge am Unterbau .	4·30 4·29 4·30	4·30	4·30	0
Sockellänge am Unterbau .	3·14 3·13 3·13	3·13	3·14	+1
Sockelbreite am Unterbau .	0·98 1·00 0·99	0·99	1·00	+1
Schrägmaß am Sockelunterbau	1·22 1·21 1·22	1·22	1·22 ₅	0
Spirale an der Stufenwange (Äußerer Durchmesser) aus Tangentialstrahlen ermittelt	0·29 0·29 0·29 ₅	0·29	0·34	+5
Spirale an der Stufenwange (Innerer Durchmesser) aus Tangentialstrahlen ermittelt	0·19 0·18 0·18	0·18	0·20	+2

wobei y direkt vom Glasnegativ entnommen wurde. Das Pauspapier wurde auf die Gelatineschicht gelegt und mit der Horizontlinie über den Horizontmarken festgehalten. Die Ablesung erfolgte bis auf ein Zehntel-Millimeter; durch Schätzung wurden noch 0'05 mm berücksichtigt.

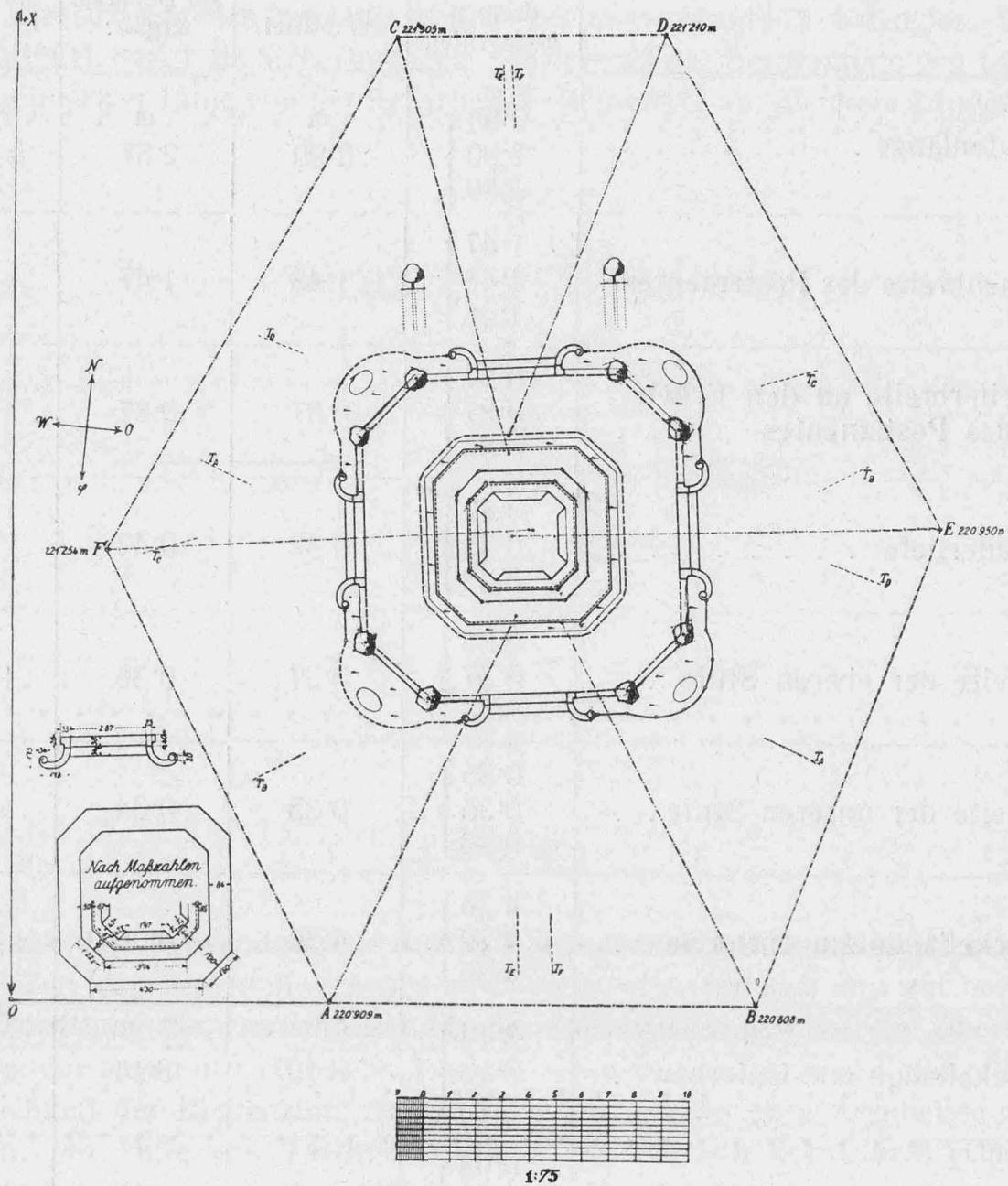


Abb. 7.

Für die durch Doppelnivellement im Anschlusse an das Stadtnivellement bestimmten Höhen ergab sich aus den Differenzen ein mittlerer Fehler von $\pm 0,8$ mm. Die durch Nivellement erhaltenen Höhenangaben können somit genügend genau als wahre Werte angesehen werden.

In der nachfolgenden Tabelle der Vergleichshöhen sind die Ergebnisse der photogrammetrischen Höhenbestimmung jenen der nivellitischen Höhenbestimmung gegenübergestellt. Die Höhen jener Punkte, die lediglich durch Ziffern ohne angehängtem Buchstaben A oder B bezeichnet sind, sind von beiden Standpunkten A und B aus photogrammetrisch bestimmt worden.

Hingegen sind die Höhen jener Punkte, deren Nummern mit einem Index *A* oder *B* versehen sind, lediglich von der betreffenden Station *A* oder *B* aus photogrammetrisch festgelegt worden. Punkt F_{VII} (zusammenfallend mit 2_B) war als Höhenfixpunkt dauernd bezeichnet. Die Abb. 8 gibt Aufschluß über die ungefähre Lage der gewählten Höhenpunkte. (Siehe Tabelle II, S. 96.)

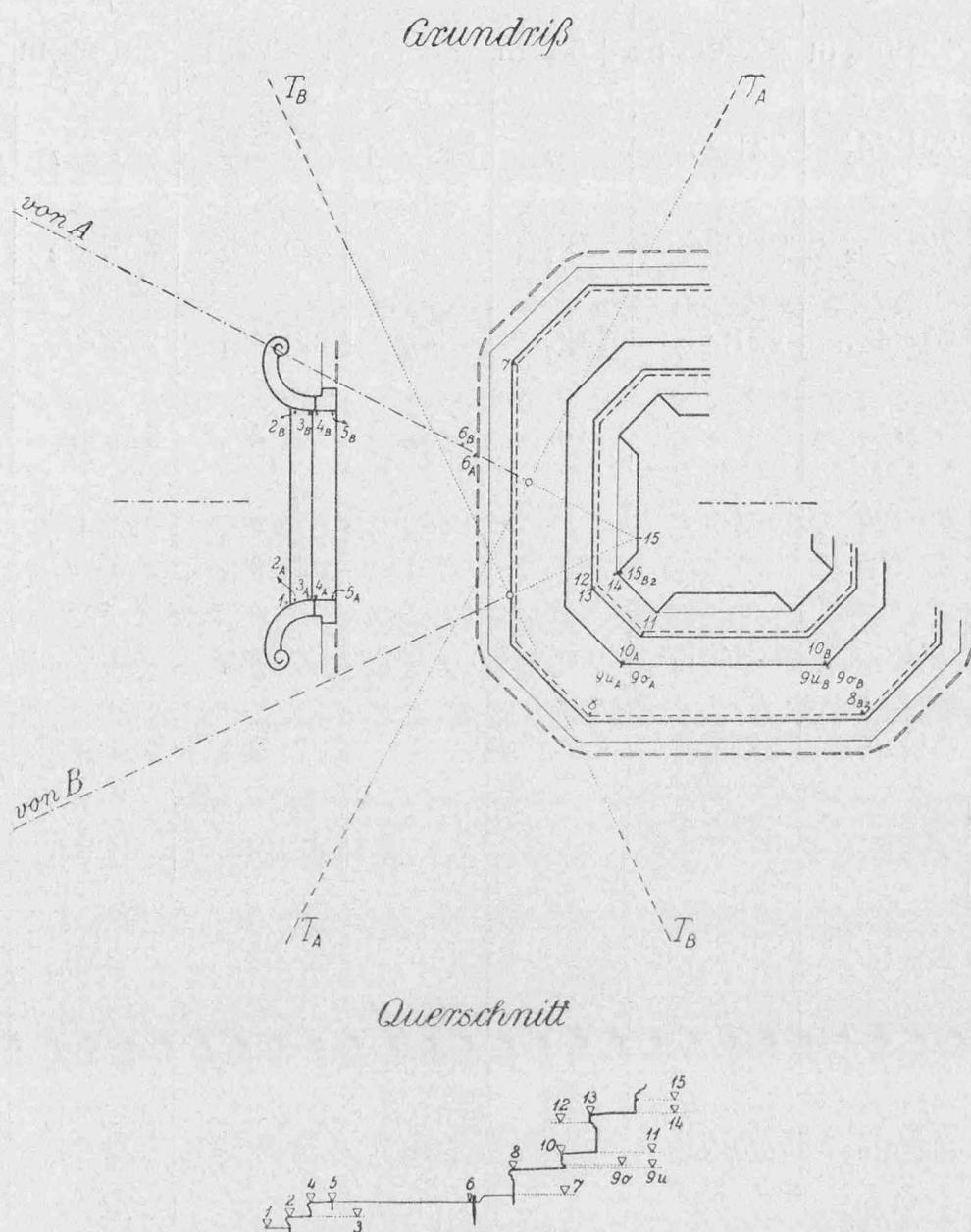


Abb. 8.

Nimmt man die aus Station *A* und aus Station *B* photogrammetrisch bestimmten Höhen -- ihre Anzahl ist $n = 52$ -- als gleichwertig an, so erhält man nach der Formel

$$m^2 = \frac{[\triangle \triangle]}{n} \quad \quad 2)$$

worin \triangle die Differenzen zwischen den wahren (durch Nivellement festgelegten) und den beobachteten (auf photogrammetrischem Wege bestimmten) Höhen

(Tabelle II.)

Tabelle der Vergleichshöhen.

Punkt	Meereshöhe			Punkt	Meereshöhe		
	photogrammetrisch von A aus	nivellitisch	Differenz		photogrammetrisch von B aus	nivellitisch	Differenz
1	221·06 ₄ m	221·06 ₇ m	+0· ₃ cm	1	221·07 ₀ m	221·06 ₇ m	-0· ₃ cm
2 _A	221·24 ₅	221·23 ₈	-0· ₇	F _{VIII} = 2 _B	221·23 ₉	221·23 ₇	-0· ₂
3 _A	221·25 ₂	221·24 ₅	-0· ₇	3 _B	221·24 ₄	221·24 ₃	-0· ₁
4 _A	221·48 ₄	221·47 ₇	-0· ₇	4 _B	221·46 ₁	221·47 ₇	+1· ₆
5 _A	221·50 ₃	221·49 ₄	-0· ₉	5 _B	221·49 ₀	221·49 ₂	+0· ₂
Erdpunkt 6 _A (6) v	221·49 ₈	221·47 ₈	-2· ₀	6 _B (6) v	221·46 ₃	221·49 ₀	+2· ₇
	221·50 ₂	221·47 ₈	-2· ₄		221·49 ₅	221·47 ₈	-1· ₇
7	221·63 ₀	221·61 ₆	-1· ₄	7	221·60 ₇	221·61 ₆	+0· ₉
8	222·00 ₂	221·99 ₂	-1· ₀	8	221·98 ₉	221·99 ₂	+0· ₃
	—	—	—	8 _{B,2}	221·98 ₂	221·99 ₁	+0· ₉
9 _{uA} (9u) v	222·04 ₈	222·03 ₁	-1· ₇	9 _{uB} (9u) v	222·01 ₂	222·02 ₇	+1· ₅
	222·03 ₉	222·01 ₅	-2· ₄		222·02 ₅	222·01 ₅	-1· ₀
9 _{oA} (9o) v	222·08 ₇	222·06 ₃	-2· ₄	9 _{oB} (9o) v	222·05 ₀	222·06 ₆	+1· ₆
	222·07 ₄	222·05 ₅	-1· ₉		222·04 ₉	222·05 ₅	+0· ₆
10 _A (10) v	222·24 ₇	222·25 ₀	+0· ₃	10 _B (10) v	222·23 ₂	222·24 ₉	+1· ₇
	222·25 ₀	222·24 ₀	-1· ₀		222·25 ₁	222·24 ₀	-1· ₁
11 (11) v	222·29 ₅	222·28 ₂	-1· ₃	11 (11) v	222·27 ₁	222·28 ₂	+1· ₁
	222·29 ₃	222·27 ₇	-1· ₆		222·29 ₁	222·27 ₇	-1· ₄
12 (12) v	222·73 ₆	222·71 ₄	-2· ₂	12 (12) v	222·71 ₁	222·71 ₄	+0· ₃
	222·72 ₇	222·71 ₄	-1· ₃		222·72 ₂	222·71 ₄	-0· ₈
13 (13) v	222·83 ₄	222·82 ₈	-0· ₆	13 (13) v	222·82 ₈	222·82 ₈	±0· ₀
	222·84 ₇	222·82 ₈	-1· ₉		222·83 ₆	222·82 ₈	-0· ₈
14 (14) v	222·87 ₀	222·86 ₀	-1· ₀	14 (14) v	222·85 ₃	222·86 ₀	+0· ₇
	222·86 ₆	222·86 ₀	-0· ₆		222·87 ₂	222·86 ₀	-1· ₂
15 (15) v	223·07 ₃	223·05 ₄	-1· ₉	15 (15) v	223·03 ₇	223·05 ₄	+1· ₇
	223·05 ₉	223·05 ₄	-0· ₅		223·04 ₃	223·05 ₄	+1· ₁
					223·05 ₁	223·05 ₄	+0· ₃

bedeuten, den mittleren Fehler m einer photogrammetrischen Höhenbestimmung mit

$$m = \pm 1.3 \text{ cm}$$

Bei den photogrammetrischen Höhenbestimmungen aus Station A ist ein konstanter Fehler deutlich bemerkbar. Macht man die Summe der positiven Differenzen (Verbesserungen) gleich der Summe der negativen Differenzen, also $[\Delta] = 0$, so führt dies zur Annahme eines konstanten Fehlers von -1.26 cm . (Dabei ist vorausgesetzt, daß man in Formel 1) das Verhältnis $\frac{D}{d}$ für die in Betracht kommenden Punkte praktisch ziemlich gleich groß setzen kann.) Bei Annahme dieses konstanten Fehlers erhält man übrigbleibende Differenzen (Δ) als zufällige Fehler, die nach Formel 2) den mittleren Fehler

$$m_A = \pm 0.8 \text{ cm}$$

ergeben, während die unveränderten Differenzen der Höhenbestimmung lediglich aus Station A (ohne Berücksichtigung des konstanten Fehlers) den mittleren Fehler

$$(m_A) = \pm 1.5 \text{ cm}$$

ergeben.

Bei den photogrammetrischen Höhenbestimmungen aus Station B tritt ein konstanter Fehler nicht bemerkenswert hervor. Die Berechnung für diese aus Station B erhaltenen Differenzen Δ liefert den mittleren Fehler

$$m_B = \pm 1.2 \text{ cm}.$$

Nach den vorstehenden Angaben kann festgestellt werden, daß sowohl der konstante als auch der zufällige Fehler in der Höhenbestimmung bei sorgfältiger Feldaufnahme und sorgfältiger Auswertung selbst mit einfachen Hilfsmitteln praktisch ziemlich belanglos bleibt.

Ein kleiner konstanter Höhenfehler kann entstehen: 1. bei der Feldaufnahme durch weniger scharfes Einspielen der in der Aufnahmsrichtung befindlichen Libelle oder durch einen Restfehler in der Berichtigung dieser Libelle; 2. bei der Auswertung, wenn die Horizontlinie des Pauspapiers nicht vollkommen scharf über den Horizontmarkenspitzen des Glasnegativs gelegt ist.

Steht für die Ausmessung der Platten ein Koordinatometer zur Verfügung, so wird ein konstanter Fehler kaum fühlbar werden.

* * *

Abschließend kann gesagt werden, daß bei Denkmalsaufnahmen, wo die Punktidentifizierung keinerlei Schwierigkeiten bietet, die Einschneidephotogrammetrie selbst mit einfachen Hilfsmitteln zur Auswertung für mancherlei Zwecke recht befriedigende Ergebnisse liefern kann. Die Begeisterung, mit welcher einzelne weitblickende Fachmänner sich schon den Aufgaben der ersten Entwicklungsperioden der Photogrammetrie hingegeben haben, zeigt sich bei Aufnahmen und Konstruktionen der ursprünglichen Art und Weise immer wieder als vollkommen begreiflich und begründet.

Es erscheint auch verständlich, daß Persönlichkeiten der staatlichen Bildstelle in Berlin mit reichen Erfahrungen an dem dort erprobten Meydenbauer'schen Verfahren festhalten, wie sich dies auf dem Kongreß in Zürich, 1930, gezeigt hat⁶⁾.

Oft spielen wohl auch in erster Linie wirtschaftliche Momente und die damit zusammenhängende Frage der zur Verfügung stehenden Feldinstrumente und Auswerteapparate eine Rolle.

Andererseits wird sich die Stereophotogrammetrie in vielen Fällen als besonders vorteilhaft erweisen, namentlich wenn es sich um die Aufnahme hervorragender Werke der Plastik handelt⁷⁾.

Manchmal mag die Verbindung der Einschneidephotogrammetrie mit gewöhnlichen Stereoaufnahmen der plastischen Kunstwerke genügen.

Es gilt eben auch für die photogrammetrischen Aufnahmeverfahren wie für alle anderen Aufnahmeverfahren der Vermessungskunde der altbewährte Grundsatz, daß erst von Fall zu Fall die am besten geeignete, alle gegebenen Umstände und die örtlichen Verhältnisse berücksichtigende Methode gewählt werden kann⁸⁾.

⁶⁾ Vgl. Lüpke, „Die staatliche Bildstelle und das Meßbildverfahren“ (Kongreß Zürich 1930). — Unte, in Zeitschr. f. Arch. u. Ing.-wesen, Hannover, 1921, Nr. 6.

⁷⁾ Vgl. Die stereophotogrammetrische Aufnahme des Totentempels „Ramesseum“ von Prof. Dr. Gast, Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1932, S. 11 f.

⁸⁾ Dieser Standpunkt wurde von mir auch gelegentlich des Internationalen Kongresses in Zürich 1930 in der Kommission Nr. 6a vertreten. Vgl. hiezu K. Schwidetski im Schlußabsatz: „Bildmessung und Luftbildwesen“, 1931, S. 183.

Ermittlung der wahrscheinlichsten Punktlage mit Hilfe von Achsenabschnitten.

Von Vermessungskommissär Ing. L. M a l y, Wien.

Das Verfahren bei Anlage der Triangulierungsnetze — nämlich das Arbeiten vom Großen ins Kleine — führt folgerichtig zu einem Berechnungsvorgang, der die Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte der rechtwinkeligen Koordinaten punktweise, bzw. von kleinen Punktgruppen gestattet. Es ist dies die Methode der Punkteinschaltung, deren theoretische Grundlage die Gauß'sche Relation bildet, die den Zusammenhang zwischen Koordinaten- und Richtungsänderungen zum Ausdrucke bringt.

Im nachstehenden soll nun die Herleitung der Fehlergleichung für jede beobachtete Richtung unmittelbar aus der analytischen Grundbeziehung zwischen rechtwinkeligen Koordinaten und Richtungswinkel gezeigt werden.

Da sowohl auf den der Lage nach gegebenen Punkten als auch auf dem Neupunkte Richtungsmessungen gemacht werden (äußere und innere Richtungen), so gliedert sich die Behandlung der Aufgabe in zwei Teile:

A) Ableitung der Fehlergleichungen für äußere Richtungen (Vorwärts einschneiden),

B) Ableitung der Fehlergleichungen für innere Richtungen (Rückwärts einschneiden).

A) Äußere Richtungen.

Werden auf bereits bestimmten Punkten Winkel- oder Richtungsmessungen zu einem Neupunkt gemacht, so ist es durch Einbeziehung mehrerer Sichten zu bereits der Lage nach gegebenen Punkten (Anschlußrichtungen) immer möglich, den Satz in bezug auf das Koordinatensystem zu orientieren und die Orientierung zu überprüfen. Es liegt demnach von jedem Standpunkte eine endgültig orientierte Richtung zum Neupunkte vor.

Hat der Standpunkt P_n die gegebenen Koordinaten y_n, x_n und bezeichnet man die orientierte Richtung zum Neupunkt P mit R_a , so liegt der Neupunkt $P (y, x)$ auf der Geraden

$$y - y_n = (x - x_n) \operatorname{tg} R_a \dots \dots \dots \quad 1)$$

In dieser Gleichung gelten y_n, x_n als fehlerfrei und die Genauigkeit der Punktlage des Neupunktes P soll nur vom Fehler der Richtungsmessung m_R beeinflußt werden.

Da der Zusammenhang zwischen den Unbekannten y, x und dem Beobachtungswert in Gl. 1) nicht linear ist, so müssen, um die Formeln der Ausgleichsrechnung anwenden zu können, Näherungswerte für die Unbekannten — die vorläufigen Koordinaten y_0, x_0 — eingeführt werden. Die gesuchten wahrscheinlichsten Werte für y und x sind somit

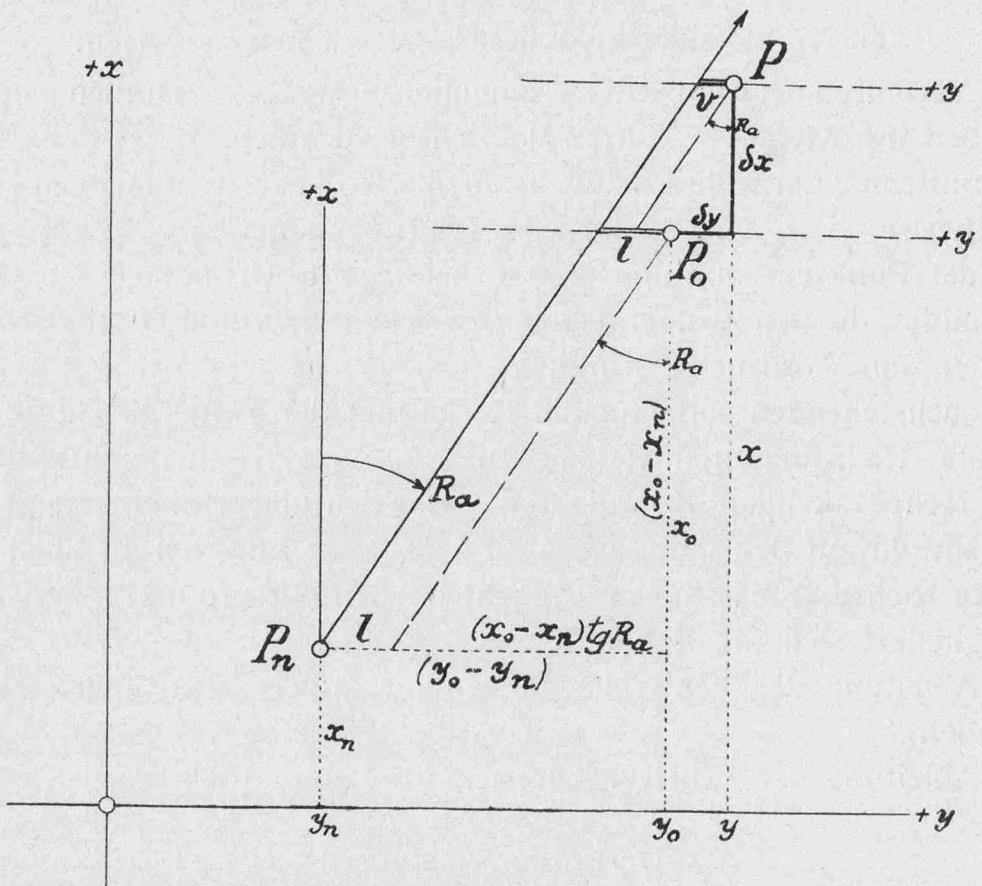
$$y = y_0 + \delta y, \quad x = x_0 + \delta x$$

und die Gl. 1) geht durch Einsetzen vorstehender Werte über in

$$\delta x \cdot \operatorname{tg} R_a - \delta y - [-(x_0 - x_n) \operatorname{tg} R_a + (y_0 - y_n)] = v \dots \dots \quad 2)$$

wo unter Beachtung des vorhandenen Messungsfehlers in R_a , „ v “ statt Null gesetzt werden muß. Die Bestimmungsgleichung wird zur Fehlergleichung.

Die nachstehende Skizze lässt leicht die geometrische Bedeutung des Absolutgliedes l (Klammerausdruck), bzw. von „ v “ erkennen.



Zieht man nämlich durch P (wahrscheinlichster Punkt), bzw. P_0 (genäherter Punkt) Parallele zur y -Achse, so entsprechen die Abschnitte des Strahles R_a (beobachtete Richtung) auf diesen Achsenparallelen den beiden Größen „ v “, bzw. dem Absolutglied l .

Vor Aufstellung der Normalgleichungen ist noch das Gewicht der einzelnen Fehlergleichungen zu bestimmen. Das Gewicht p einer Gleichung ist im wesentlichen — von Sonderfällen abgesehen — durch den mittleren Fehler m_l des Absolutgliedes (Beobachtungswert) bestimmt und wird nach der Formel

$$p = \frac{k^2}{m_l^2}$$

ermittelt, worin k der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist und nach praktischen Bedürfnissen gewählt werden kann.

Im vorliegenden Falle ist das Absolutglied

$$l = -(x_0 - x_n) \operatorname{tg} R_a + (y_0 - y_n),$$

worin nur R_a fehlerhaft sein soll. Mithin ist

$$m_l = \pm \frac{(x_0 - x_n)}{\cos^2 R_a} \cdot m_R$$

und das Gewicht

$$p_1 = \left(\frac{\cos^2 R_a}{x_0 - x_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{m_R^2},$$

wobei nach der derzeit üblichen Anlage des Beobachtungsplanes m_R als konstant betrachtet wird.

Die durch Gl. 2) dargestellte Form der Fehlergleichung muß nun noch hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit für alle möglichen Werte von R_a untersucht werden. Wird $R_a = 90^\circ$, bzw. 270° , so ist diese Gleichungsform unbrauchbar, denn l und v , die Achsenabschnitte auf der y -Achse, werden unendlich groß und der Ausdruck für das Gewicht nimmt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

In diesem Falle tritt an Stelle der y -Richtung die vollständig gleichberechtigte x -Richtung, auf der die Abschnitte l und v wieder endlich sind. Die Fehlergleichung — durch Division der Gl. 2) durch $\operatorname{tg} R_a$ erhalten — lautet nun

$$\delta x - \delta y \cdot \operatorname{cotg} R_a - [-(x_0 - x_n) + (y_0 - y_n) \operatorname{cotg} R_a] = v \quad \dots \quad 2a)$$

und das Gewicht wird

$$p_2 = \left(\frac{\sin^2 R_a}{(y_0 - y_n)} \right)^2.$$

Für einen gegebenen Wert R_a wird jene Gleichungsform anzuwenden sein, die das größere Gewicht hat. Überprüft man die beiden Gewichtswerte p_1 und p_2 in dieser Hinsicht, so ergibt sich die einfache Regel:

Für $R \leq 45^\circ$ gilt die Tangentenform, Gleichung 2),

„ „ $R \geq 45^\circ$ „ „ Cotangentenform, Gleichung 2a).

B) Innere Richtungen.

Liegen neben äußeren Richtungen auch innere Richtungen (Messung am Neupunkt) zur Punktbestimmung vor, so tritt zu den Unbekannten x und y noch der Orientierungswinkel O hinzu.

Natürlich stellt Gl. 1) wieder den funktionellen Zusammenhang aller in Betracht kommenden Größen dar, mithin vom Neupunkt ausgehend

$$\frac{y_n - y}{x_n - x} = \operatorname{tg} R_i.$$

R_i ist die noch unbekannte innere orientierte Richtung von P nach P_n und ergibt sich mit

$$R_i = R_m + O.$$

R_m = Mittel der Feldbeobachtung, O = Orientierungswinkel.

Um die Grundgleichung linear zu machen, führt man wieder Näherungswerte für die Unbekannten ein, — nämlich y_0 , x_0 und O_0 — die so genau sein müssen, daß durch das Weglassen der Reihenglieder höherer Ordnung der Beobachtungs-, bzw. Rechengenauigkeit noch immer entsprochen wird. Durch Einsetzen dieser Näherungswerte erhält man

$$\frac{y_n - y_0 - \delta y}{x_n - x_0 - \delta x} = \operatorname{tg} (R_m + O_0 + \delta O) = \operatorname{tg} (R'_i + \delta O),$$

worin R'_i = genäherte innere orientierte Richtung; ferner ist

$$\operatorname{tg} (R'_i + \delta O) = \operatorname{tg} R'_i + \frac{\delta O}{\cos^2 R'_i} + \dots$$

Setzt man den vorstehenden Wert in die obige Gleichung ein, schafft den Nenner weg und entwickelt die Produkte mit Vernachlässigung der Glieder höherer Kleinheitsordnung, so erhält man die Fehlergleichung für den Fall der inneren Richtungen:

$$\delta x \cdot \operatorname{tg} R_i' - \delta y - \frac{(x_n - x_0)}{\cos^2 R_i'} \cdot \delta O - [(x_n - x_0) \operatorname{tg} R_i' - (y_n - y_0)] = v \dots 3),$$

deren Gewicht sich wieder mit

$$p_1 = \left(\frac{\cos^2 R_i'}{x_n - x_0} \right)^2$$

ergibt.

Um bei der Reihenentwicklung des Ausdrückes

$$\operatorname{tg}(R_i' + \delta O) = \operatorname{tg} R_i' + \frac{\delta O}{\cos^2 R_i'} + \dots$$

die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen zu können, muß der Wertebereich von R_i' begrenzt werden. Die gleiche Überlegung wie im Falle der äußeren Richtungen führt auch hier wieder zur Beschränkung des Geltungsbereiches der Gleichungsform, nämlich

für $R_i = 0^\circ \pm 45^\circ$, bzw. $180^\circ \pm 45^\circ \dots$ Tangentenform Gl. 3)

für $R_i = 90^\circ \pm 45^\circ$, bzw. $270^\circ \pm 45^\circ \dots$ Cotangentenform Gl. 3a).

Die letztere lautet

$$\delta x - \delta y \operatorname{cotg} R_i' - \frac{(y_n - y_0)}{\sin^2 R_i'} \cdot \delta O - [(x_n - x_0) - (y_n - y_0 \operatorname{cotg} R_i')] = v \dots 3a)$$

mit dem Gewicht $p_2 = \left(\frac{\sin^2 R_i'}{y_n - y_0} \right)^2$.

Mithin sind die Fehlergleichungen und Gewichte für beide möglichen Fälle (äußere und innere Richtungen) abgeleitet und können in bekannter Weise die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten daraus ermittelt werden.

Wird jedoch bei Durchführung der Feldbeobachtung mit genügender Sicherheit dafür Sorge getragen, daß der Beobachtungsfehler einer Richtung als unabhängig von der Distanz betrachtet werden kann, und werden die den Punkt bestimmenden Richtungen gleich oft gemessen, dann ist es möglich, noch vor Bildung der Normalgleichungen die Fehlergleichungen für innere Richtungen zu vereinfachen. (Die oben angeführten Voraussetzungen werden nach dem derzeit üblichen Berechnungsvorgang als gegeben angenommen.)

Bringt man nämlich die Fehlergleichungen durch Multiplikation mit \sqrt{p} auf gleiches Gewicht, so ergibt sich der Koeffizient von δO in allen Fehlergleichungen mit

$$\frac{x_n - x_0}{\cos^2 R_i'} \cdot \sqrt{p_1} = \frac{(x_n - x_0)}{\cos^2 R_i'} \cdot \frac{\cos^2 R_i'}{(x_n - x_0)} = 1.$$

Dadurch nimmt die Normalgleichung für δO die einfache Form

$$[v] = O$$

an, mit deren Hilfe in bekannter Weise δO aus den Fehlergleichungen eliminiert werden kann, bzw. die „reduzierten Normalgleichungen“ gebildet werden können. Unter Beachtung dieses Umstandes entfällt jeder Ansatz für die Orientierungsunbekannte.

Vor Besprechung der rechnerischen Auswertung soll nun noch gezeigt werden, daß sich die im vorstehenden entwickelten Fehlergleichungen restlos in die übliche, nach der Gauß'schen Relation entwickelte Form überleiten lassen.

Die Fehlergleichung für eine äußere Richtung, transformiert für die Gegenrichtung $R_a \pm 180^\circ$, lautet

$$\delta x \cdot \operatorname{tg} R - \delta y - [(x_n - x_0) \operatorname{tg} R - (y_n - y_0)] = v \dots p = \left(\frac{\cos^2 R}{x_n - x_0} \right)^2.$$

Bringt man die Gleichung durch Multiplikation mit \sqrt{p} auf das Gewicht 1, so erhält man

$$\delta x \cdot \frac{\sin R \cdot \cos R}{(x_n - x_0)} - \delta y \cdot \frac{\cos^2 R}{(x_n - x_0)} - \left[\sin R \cdot \cos R - \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \cdot \cos^2 R \right] = v'.$$

Beachtet man, daß

$\frac{x_n - x_0}{\cos R} = s_0$ (die genäherte Seite) und $\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \operatorname{tg} \sigma_0$ (genäherter Richtungswinkel), so lautet die Gleichung

$$\delta x \cdot \frac{\sin R}{s_0} - \delta y \cdot \frac{\cos R}{s_0} - [\sin R \cdot \cos R - \operatorname{tg} \sigma_0 \cdot \cos^2 R] = v'.$$

Die Koeffizienten sind nichts anderes als die üblichen Richtungskoeffizienten „a“ und „b“, nur ist der genäherte Richtungswinkel durch die orientierte Richtung ersetzt, was auf jeden Fall zulässig ist. Bleibt also noch eine entsprechende Umformung des Absolutgliedes L (Klammerausdruck).

$$\begin{aligned} L &= \sin R \cos R - \operatorname{tg} \sigma_0 \cdot \cos^2 R = \frac{\cos R}{\cos \sigma_0} (\sin R \cdot \cos \sigma_0 - \cos R \sin \sigma_0) \\ &= \frac{\cos R}{\cos \sigma_0} \cdot \sin (R - \sigma_0). \end{aligned}$$

Nun ist nach der üblichen Bezeichnung

$\sigma_0 - R = w \dots$ (genäherter Richtungswinkel — orientierte Richtung) daher $R = \sigma_0 - w$; dies eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} \text{Absolutglied} &= - \frac{\cos(\sigma_0 - w)}{\cos \sigma_0} \cdot \sin w \\ &= \left(\frac{-\cos \sigma_0 \cdot \cos w - \sin \sigma_0 \cdot \sin w}{\cos \sigma_0} \right) \cdot \sin w \\ &= -\cos w \cdot \sin w - \operatorname{tg} \sigma_0 \cdot \sin^2 w. \end{aligned}$$

Nun muß der Widerspruch w immer so klein sein, daß man die höheren Potenzen von w vernachlässigen kann, ferner kann $\operatorname{tg} \sigma_0$ höchstens den Wert 1 annehmen (für Werte über 45° gilt die Cotangentialenform der Gleichung).

Aus diesen Gründen wird das

$$\text{Absolutglied} = -w.$$

Die transformierte Fehlergleichung lautet nun

$$\delta x \cdot \frac{\sin R}{s_0} - \delta y \cdot \frac{\cos R}{s_0} + w = v'$$

und stellt nach Multiplikation mit $p'' = 206.265''$ die übliche Form der Fehlergleichung dar. Die gleiche Form wird natürlich auch durch Umformung der Cotangentialenform der Gleichung erhalten.

Anlage und numerische Durchführung der Rechnung.

Um für die Gleichungen aller Richtungen (äußere und innere) dasselbe

Vorzeichenschema anwenden zu können, transformiert man beispielsweise die äußeren Richtungen auf die Gegenrichtung $R_a \pm 180^\circ$.

Der Vorgang bei Aufstellung der Fehler-, bzw. Normalgleichungen ist nun folgender:

Gegeben sind die endgültigen Koordinaten y_n, x_n der Punkte P_n und die Mittelwerte R_m der Feldbeobachtungen, die in das Formular „Orientierung der Richtungen“ eingetragen werden. Nach Ermittlung der Näherungskoordinaten y_0, x_0 — am einfachsten durch Vorwärtsschnitt — können die Koordinatendifferenzen $(y_n - y_0)$ und $(x_n - x_0)$ gebildet und durch Summenprobe kontrolliert werden, wobei es genügt, die Einer und Dezimalen zu berücksichtigen.

$$[y_n] - n \cdot y_0 = [y_n - y_0], [x_n] - n \cdot x_0 = [x_n - x_0].$$

Mit Hilfe der Ordinatenwerte und der Abszissendifferenzen ermittelt man nun die Azimutreduktionen, wenn im konformen System gerechnet werden soll, und erhält durch vorzeichenrichtige Anbringung derselben an die Feldbeobachtungen die verebneten Richtungen, die, sofern es sich um äußere handelt, nun endgültig orientiert werden können und aus dem Orientierungsformular in das Rechenformular in der Spalte unter „ R_n “ eingetragen werden. Mit Hilfe einer äußeren Richtung wird der genäherte Orientierungswinkel O_0 für die inneren Richtungen ermittelt und diese ebenfalls unter „ R_n “ eingetragen. Damit sind alle vorbereitenden Arbeiten erschöpft.

Die weitere Rechnung erfordert keinerlei Überlegungen hinsichtlich der Wahl der Gleichungsform oder der Vorzeichen.

Die Spalten für die Koordinatendifferenzen $(x_n - x_0)$, bzw. $(y_n - y_0)$ sind bereits ausgefüllt. Immer zur größeren Differenz wird der Winkelfunktionswert geschrieben, dessen Vorzeichen, durch die Koordinatendifferenzen bestimmt, vorher schon in der betreffenden Zeile vermerkt wird. Der Winkelfunktionswert wird aus der Brandenburg-Tafel 7-stellig entnommen, wobei nur die Spalte mit der Kopfbezeichnung „Tang.“ benutzt wird. Gleichzeitig wird bei jeder Richtung auch aus der Spalte mit der Kopfbezeichnung „Cos“ der Funktionswert, aber nur auf höchstens 4 Stellen, entnommen und ohne Berücksichtigung des Vorzeichens vermerkt. Hierauf erfolgt mit der Rechenmaschine die Bildung der l -Werte, wobei immer $(\triangle x) - (\triangle y)$ zu bilden ist.

$$(\triangle x) = (x_n - x_0) \times \text{Faktor in „Tang.“-Spalte}$$

$$(\triangle y) = (y_n - y_0) \times \text{Faktor in „Cotang.“-Spalte}.$$

Die Faktoren sind die Winkelfunktionswerte oder 1. Die l -Werte sind höchstens auf „mm“ anzugeben. Schließlich erfolgt noch die Ermittlung der \sqrt{p} -Werte mittels Rechenmaschine, Rechenschieber, Dia- oder Nomogramm, wobei die Vorzeichen, die gleich dem Vorzeichen der größeren Koordinatendifferenz sind, immer zuerst alle auf einmal angeschrieben werden. Bei größter Rechenschärfe genügen 3 bis 4 gültige Ziffern.

Zur Erzielung einer für die numerische Rechnung bequemen Größenordnung der Koeffizienten empfiehlt es sich, den 10.000-fachen Wert von \sqrt{p}

Neupunkt: Siebenhügel (Pyramide)

Zum Artikel: Maly,
Ermittlung der wahrscheinlichsten Punktlage usw.

Gegebener Punkt	Y _n	X _n	endgültiger Richtungs- winkel v orientierte Richtung R _n	$\Psi_a = -K \cdot \Delta x$ (2Y _n + Y _o) $\Psi_i = +K \cdot \Delta x$ (Y _n + 2Y _o) K=0.0008447 alle Längen in km	$\Delta x = \Delta x - \delta x$	$\tg v$	$\Delta y = \Delta y - \delta y$	$\cotg v$	$\frac{\sqrt{p}}{10.000 r^2}$ größeres Δ	$l =$	a =	b =	L =	s =	$\sin v$	$\cos v$	Seite			
					$\Delta x = X_n - X_o$	$\tg R_n$	$\Delta y = Y_n - Y_o$	$\cotg R_n$	$\frac{\Delta x \cdot \tg R}{\Delta y \cdot \cotg R}$	$\frac{1}{\tg R \cdot \sqrt{p}}$	$\frac{a}{\cotg R \cdot \sqrt{p}}$	$\frac{b}{1 \cdot \sqrt{p}}$	$\frac{L}{(a+b+L)}$	$\frac{s}{v''}$	$\frac{v''}{a}$					
	m	m	0 , "	$2Y_n + Y_o$ $Y_n + 2Y_o$	Ψ_a'' Ψ_i''	m	m	Vorzeichen nach Δx u. Δy	m	Vorzeichen nach Δx u. Δy	r = $\frac{\sin R}{\cos R}$	\sqrt{p}					m			
a. i.	Falkenberg Stein	+ 70.686 727	+ 166.619 084	335 56 55'01	53'73	213'4 -0'54	+ 2.969 914	- 0'446 3037	- 1.325 473		913	+ 2'807	- 0'011	- 1'253	- 2'807	- 0'031	+ 4'091	- 1'28	0'407 5615 0'913 1778	3252'294 4
i.	Falkenberg Pyr.	+ 70.686 731	+ 166.619 097	335 56 52'82	54'30	214'7 +0'54	+	" 927	" 3070	506	913	+ 2'807	- 0'058	- 1'253	- 2'807	- 0'163	+ 4'223	+ 0'13	0'407 5589,5 0'913 1789	3252'305 5
a. i.	Kreuzbergl Bolzen Süd	+ 73.258 871	+ 165.994 717	27 59 24'13	24'32	218'5 -0'43	+ 2.345 547	+ 0'531 4864	+ 1.246 671		883	+ 3'324	- 0'045	+ 1'767	- 3'324	- 0'150	+ 1'707	+ 0'19	0'469 3188 0'883 0288	2656'262 3
i.	Kreuzbergl südl. Turm	+ 73.258 132	+ 165.997 145	27 57 04'10	05'27	217'3 +0'43	+ 2.347 975	+ 0'530 6161	+ 1.245 932		883	+ 3'321	- 0'059	+ 1'762	- 3'321	- 0'196	+ 1'755	- 0'18	0'468 7235 0'883 3449	2658'060 0
a. i.	Pfarrkirche südl. Exzent.	+ 74.632 426	+ 165.653 336	52 35 16'44	15'83	221'3 -0'38	+ 2.004 166		+ 2.620 226	+ 0.764 8924	794	+ 2'406	- 0'025	+ 2'406	- 1'840	- 0'060	- 0'506	- 0'61	0'794 2845 0'607 5459,5	3298'804 4
i.	Pfarrkirche Turm	+ 74.637 452	+ 165.659 153	52 33 35'49	38'09	218'6 +0'37	+ 2.009 983		+ 2.625 252	+ 0.765 6685	794	+ 2'401	- 0'090	+ 2'401	- 1'838	- 0'216	- 0'347	+ 1'25	0'793 9966 0'607 9222,5	3306'330 1
a. i.	Predigstuhl Pyr.	+ 77.684 534	+ 162.217 900	104 09 40'93	41'55	227'4 +0'27	- 1.431 270		+ 5.672 334	- 0.252 3216	970	+ 1'659	- 0'018	+ 1'659	+ 0'419	- 0'030	- 2'048	+ 0'62	0'969 6098 0'244 6566	5850'082 1
i.	Predigstuhl Pyr.	+ 77.684 534	+ 162.217 900	104 09 40'93	41'55	221'7 -0'27	- " "	+ " "	+ " "	970	+ 1'659	- 0'018	+ 1'659	+ 0'419	- 0'030	- 2'048	- 0'73	0'969 6098 0'244 6566	5850'082 1	
a. i.	Schrottkogel Stein Ost	+ 69.603 991	+ 126.796 048	250 29 36'74	36'54	211'2 +0'15	- 853 122		- 2.408 209	+ 0.354 2455	943	- 3'693	- 0'025	- 3'693	+ 1'308	+ 0'092	+ 2'293	- 0'20	0'942 6035 0'333 9141	2554'888 8
i.	Schrottkogel Pyr. Ost	+ 69.603 998	+ 162.796 056	250 29 34'91	36'96	213'6 -0'15	- " 114		- 239	+ 2443	943	- 3'693	+ 0'005	- 3'693	+ 1'308	- 0'018	+ 2'403	+ 0'70	0'942 6042 0'333 9122	2554'878 8
a. i.	Nadram Baumsignal	+ 74.547 049	+ 160.025 125	145 01 45'48	45'65	218'5 -0'67	- 3.624 045	- 0'699 4457	+ 2.534 849		819	- 1'851	- 0'026	+ 1'295	+ 1'851	+ 0'048	- 3'194	- 1'18	0'573 1568 0'819 4457	4422'546 5
a. i.	Siebenhügel Pyr.	50 245...[Y _n] - n.Y _o 691...[X _n] - n.X _o	+ 163.649 170...Näherungskoordinaten Y _o , X _o			54 691...[X _n - X _o]		50 245...[Y _n - Y _o]			[ai]	[bi]	[Li]	[si]						
		+ 72.012 200	+ 163.649			790		838			+ 2'171	- 4'388	- 0'575	+ 2'792	6'50					
		+ 037	- 009			99 = II.δx		407 = II.δy			+ 0'36183	- 0'73133	- 0'09583	+ 0'46533	/vv/					
	Siebenhügel Pyr.	+ 72.012 237	+ 163.649	I61...endgültige Koordinaten																

Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen

$$\begin{aligned}
 & +54'5931 \quad -17'8167 \quad -1'1329 \quad -35'6435 = 0 \\
 & -0'326354 \quad -0'020752 \\
 & +48'5903 \quad +1'9415 \quad -32'7151 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -5'8146 \quad -0'3697 \quad -11'6324 \\
 & +0'0965 \quad -0'9051 = 0
 \end{aligned}$$

$$-0'0235 \quad -0'7397$$

$$+42'7757 \quad +1'5718 \quad -44'3475 = 0$$

$$+0'036745 = \delta y$$

$$+0'0730 \quad -1'6448 = 0$$

$$-0'0578 \quad +1'6296$$

$$+0'0152 \quad -0'0152 = 0, [vv] = 6'47"$$

$$[vv]$$

$$m_o = \pm \sqrt{\frac{0'0152}{8}} = \pm 0'0436 \sim \pm 0'9''$$

$$\begin{aligned}
 & +48'5903 \quad -17'8167 \quad +1'9415 \\
 & -0'366672 \quad +0'039957 \\
 & +54'5931 \quad -1'1329 \\
 & -6'5329 \quad +0'7119 \\
 & +0'0965 \\
 & -0'0776 \\
 & +48'0602 \quad -0'4210 \\
 & -0'008741 = \delta x \\
 & +0'0189 \\
 & -0'0037 \\
 & +0'0152 \\
 & [vv]
 \end{aligned}$$

$$\delta x = -0'009^m$$

$$m_x = \pm 0'006^m$$

zu verwenden, für Punkte höherer Ordnung (Koordinatendifferenzen über ca. 15 km) vielleicht den 100.000-fachen Wert.

Nun ermittelt man die Produkte

$$\begin{aligned}a &= \text{Koeffizient von } \delta x = \operatorname{tg} R \cdot \sqrt{p} \text{ bzw. } \sqrt{p} \\b &= \text{Koeffizient von } \delta y = -\sqrt{p} \text{ bzw. } -\operatorname{cotg} R \cdot \sqrt{p} \\L &= \text{Absolutglied} = l \cdot \sqrt{p}\end{aligned}$$

mit Rechenmaschine oder Rechenschieber auf höchstens 3 bis 4 gültige Ziffern und bildet schließlich für die Summenprobe $s = -(a + b + L)$, wobei es sich empfiehlt, alle Vorzeichen zuerst anzuschreiben. Hierauf erfolgt die Summierung aller die inneren Richtungen betreffenden Werte und Division durch die Anzahl der Richtungen (Elimination der Orientierungsunbekannten). Nun bildet man in der Rechenmaschine die Koeffizienten und Absolutglieder der Normalgleichungen und löst diese nach der Gauß'schen Eliminationsmethode auf. Ein Vorzeichenwechsel für δx und δy findet nicht statt.

Nach Subtraktion der Werte δy und δx von $(y_n - y_0)$, bzw. $(x_n - x_0)$ rechnet man die endgültigen Richtungswinkel v , die mit roter Tinte in der Spalte „ R_n “ eingetragen werden. Gleichzeitig entnimmt man der Tafel $\sin v$ und $\cos v$ zur Berechnung der endgültigen Seiten. Nach Eintragung der Richtungswinkel v in die Orientierungsformulare der Punkte ermittelt man die Verbesserungen $v = v - R$ der einzelnen äußeren und inneren Richtungen (bei den inneren Richtungen nach erfolgter endgültiger Orientierung) und bildet die Quadratsumme $[vv]$, die mit dem durch zweimalige Reduktion aus den Normalgleichungen erhaltenen Wert übereinstimmen muß.

$$[vv] = [LL \cdot 2]$$

(Durchgreifende Kontrolle.) Der letzte Wert muß nur noch, um auf Bogensekunden zu kommen, multipliziert werden mit

$$\begin{aligned}\frac{\rho^2}{10.000^2} &= 425 \cdot 6 \dots \dots \text{ bei 10.000-fachem } \sqrt{p} \\ \text{bzw. } \frac{\rho^2}{100.000^2} &= 4 \cdot 256 \dots \dots \text{ bei 100.000-fachem } \sqrt{p}.\end{aligned}$$

Liegen exzentrisch beobachtete äußere oder innere Richtungen vor, so werden nach Berechnung der endgültigen, bzw. vorläufigen Koordinaten der Exzenter mit Hilfe der gemessenen als fehlerfrei geltenden Exzentrizitäts-elemente die Fehlergleichungen in derselben Weise wie früher angesetzt. Für jeden Exzenter eines Neupunktes tritt eine Orientierungsunbekannte auf, was bei der Reduktion der inneren Richtungen und bei Ermittlung der überschüssigen Messungen zu beachten ist, aber keinerlei Mehrarbeit verursacht.

Sind mehrere Punkte im Zusammenhange auszugleichen, so werden die Fehlergleichungen in der gleichen Weise angesetzt. Jede Richtung zwischen zwei Neupunkten bedingt eine Fehlergleichung mit vier Unbekannten (die Orientierungsunbekannte erfordert keinen Ansatz) mit paarweise gleichen, aber entgegengesetzten bezeichneten Koeffizienten.

Projekt einer Katastervermessung Spaniens mittels Luftphotogrammetrie.

Verfaßt durch die Compañía Española de Trabajos Fotogramétricos Aéreos (CETFA) und mitgeteilt von Ing. F. Manek, Madrid¹⁾.

Allgemeines.

Ältere Katasteraufnahmen Spaniens wurden nur vereinzelt, z. B. durch Pedro Esquivel, durch das Land Katalonien und durch den Marqués de la Ensenada ausgeführt. Erst in den Jahren 1896, 1900 und 1906 erschienen die ersten diesbezüglichen Gesetze, deren Hauptzweck in der Erreichung von größeren Staatseinnahmen bestand.

Durch das Gesetz vom 23. März 1906 wurde eine allgemeine Katasteraufnahme angeordnet, welche die Ausführung der Arbeiten in zwei aufeinanderfolgenden Zeiträumen vorsah: Erstens eine flüchtige Aufnahme („Avance Catastral“, auch „tono fiscal“) und zweitens den eigentlichen Kataster. Während der letztgenannte überhaupt nicht zur Ausführung kam, umfaßte die skizzenmäßig angefertigte, flüchtige Aufnahme bis zum 1. Jänner 1929 eine Fläche von 21 Millionen ha (vgl. Abb. 1) und die Auslagen hiefür waren etwa 6 Pesetas pro ha.

Am 3. April 1925 bestimmte ein Gesetz, daß keine neuen Arbeiten mehr für die flüchtige Aufnahme begonnen, sondern nur die im Gange befindlichen beendet werden sollen und daß eine Stückvermessung („Catastro Parcelario“) durch das Geographische Institut in jenen Gebieten vorzunehmen sei, wo das Finanzministerium die flüchtige Aufnahme noch nicht begonnen habe. Das Ergebnis dieser Parzellaraufnahme war in den verschiedenen Jahren folgendes:

1925 bis 1927	—
1928	31.942 ha
1929	110.300 ha
1930	262.535 ha
1. Jänner bis 5. Juni 1931	<u>163.831 ha</u>
Zusammen . . .	568.608 ha.

Es verblieben laut einer Denkschrift der Katasterdirektion (Dirección General de Propiedades) aus dem Jahre 1928 als noch aufzunehmen:

5019 Gemeindegebiete mit einer Fläche von 22 Millionen ha.

Nimmt man die ersten fünf Monate des Jahres 1931 zur Grundlage, so errechnet sich für die Parzellaraufnahme eine Jahresleistung von 393.192 ha und ein Gesamtpreis von rund 17 Pesetas pro ha.

Nun ist in der letzten Zeit die rasche Durchführung der Katasteraufnahme aus folgenden Gründen eine dringende Notwendigkeit geworden:

¹⁾ Vgl. die Denkschrift „Catastro Rápido Nacional“ (Beschleunigte nationale Katasteraufnahme), die im Oktober 1931 von der genannten Spanischen Gesellschaft für Luftbildmessungen herausgegeben wurde.



Abb. 1. — Stand der Katasteraufnahmen in Spanien.

	Flüchtige Katasteraufnahme, ausgeführt bis Ende 1925	19 Mill. ha
	Desgl., vorbereitet bis Ende 1925 (hievon ausgeführt bis Ende 1928: 2 Mill. ha)	7 Mill. ha
	Provinzen mit eigener Katasteraufnahme	2 Mill. ha
	usw.: Aufnahmezonen für die projektierte Katasteraufnahme mittels Luftphotogrammetrie (vgl. die Übersicht im Text):	22 Mill. ha
	Flächeninhalt Spaniens (einschließlich der Inseln):	50 Mill. ha

a) *Schaffung einer unmittelbaren und gerechten Unterlage für die Steuereinhebungen.*

Obgleich es oberster Grundsatz sein sollte, alle Steuerzahler auf gleiche Weise zu behandeln, so hat die bisherige Langsamkeit der Aufnahme sowie auch die Auswahl der aufzunehmenden Gebiete dazu geführt, daß in vielen Fällen eine willkürliche, zu geringe Schätzung erfolgte, während andere Besitzer die vollen, von der Katasterbehörde vorgeschriebenen Quoten zu entrichten haben und sich daher benachteiligt fühlen.

b) *Erhöhung der staatlichen Einnahmen aus der Grundsteuer.*

Die bereits flüchtig aufgenommenen 21 Millionen ha haben, als man die hiefür zu entrichtenden Steuerquoten aufstellte, eine Erhöhung der staatlichen Einnahmen um jährlich 38 Millionen Peseten gebracht. Durch die Aufnahme der noch fehlenden 22 Millionen ha wird eine weitere Erhöhung der Steuern um mindestens 41 Millionen Peseten im Jahre eintreten.

c) *Lösung des Agrarproblems.*

Ein ganz besonderes Augenmerk wendet die neue Regierung der Lösung des Agrarproblems zu, wofür sie jedoch eine genaue Kenntnis der Ausmaße und Eigenheiten der einzelnen Gebiete benötigt. Hier wäre es von unschätzbarem Werte, sogleich, ohne erst das Gelände zu begehen, entscheiden zu können, ob dasselbe bebaut oder unbebaut, bewässert oder unbewässert, bewaldet oder unbewaldet u. v. a. m. sei.

Nur die Anwendung der bereits in vielen Kulturländern erprobten Luftphotogrammetrie wird allen diesen Forderungen gerecht, denn sie bildet das übersichtlichste und verlässlichste Dokument über die Oberflächenbeschaffenheit eines Landes (vgl. Abb. 2). Der folgende Vergleich für eine Aufnahme der noch fehlenden Fläche von 22 Millionen ha zeigt mit großer Deutlichkeit, die Vorteile an Zeit und Geld, welche sich normalerweise gewinnen lassen.

	Voraussichtliche Arbeitsdauer	Kosten	
		Pesetas	Pts/ha
Parzellaraufnahme	57	382	17
Flüchtige Aufnahme	22	136	6
Rasche, nationale Aufnahme mittels Luft- photogrammetrie	5	123	5,5.

Zieht man in Betracht, daß in Spanien bereits $2\frac{1}{2}$ Millionen ha durch die genannte Gesellschaft luftphotogrammetrisch vermessen wurden und daß dieses Verfahren in allen Kulturländern die ausgedehnteste Verwendung findet, so erübrigts sich die Angabe von Einzelheiten über Instrumente, Verfahren usw.

Was die Genauigkeit der Flächenberechnung betrifft, so ist dieselbe im flachen Gelände, wo sich auch der wertvollere Boden befindet, sehr groß. Für gebirgiges Gelände gibt die CETFA folgende Mittelwerte aus der Flächenberechnung von vielen, auf dem Felde und in den entzerrten Bildern gemessenen Parzellen an.

Bei 34% der Parzellen war der Unterschied in der Flächen-	berechnung kleiner als	1 %
„ 50%	“	1,25%
„ 75%	“	2 %
„ 90%	“	3 %
„ 98%	“	4 %
größter Unterschied		4,6 %.

Aus diesen Angaben ersieht man, daß bei der Anwendung des vorgeschlagenen, verhältnismäßig einfachen luftphotogrammetrischen Verfahrens die Größe der Parzellen aus den entzerrten Bildern ungefähr ebenso gut bestimmt werden kann wie aus Plänen, und jedenfalls eine um vieles bessere Gewähr gibt als die Schätzungswerte, die noch heute teilweise der Besteuerung zugrundeliegen.



Abb. 2. — Luftaufnahme aus der Umgebung von Baza
(Provinz Granada).

($f = 25 \text{ cm}$, $18 \times 18 \text{ cm}$, Flughöhe etwa 3350 m .)

Als Entzerrungsgrundlage für den Planmaßstab 1:5000 diente in jedem Bilde ein geschlossener Polygonzug mit identifizierten Paßpunkten. Auf dem Bilde tritt besonders klar die Trennungslinie zwischen bewässertem („huerta“) und unbewässertem Gelände („secano“) hervor.

Die bei dem vorgeschlagenen Aufnahmeverfahren in Verwendung kommenden Dokumente wären folgende:

1. Situationspläne der Provinzen im Maßstab 1:100.000 mit Angabe der Gemeindegebiete.
2. Graphische Pläne der Gemeindegebiete im Maßstab 1:25.000.
3. Photographische Mosaikpläne der Gemeindegebiete im Maßstab 1:10.000.
4. Photographische Vergrößerung der entzerrten Bilder in den jeweils entsprechenden Maßstäben 1:5000, 1:2000 und 1:1000 mit roter Einzeichnung der Parzellen und ihrer Nummern.

5. Parzellen-Kartothek.
6. Eigentümer-Kartothek.

Die vorstehend angegebenen Dokumente werden in einem übersichtlich angeordneten Archiv gemeindeweise aufbewahrt.

A r b e i t s p r o g r a m m .

Das Gelände wird in parallelen Streifen überflogen und mittels Vertikalaufnahmen lückenlos aufgenommen.

Die notwendigen Paßpunkte sollen mittels der üblichen topographischen Verfahren und unter ausgiebiger Verwendung der Bildtriangulierung eingemessen werden.

Auf Grund der Paßpunkte erfolgt dann bei flachem Gelände die Entzerrung und bei gebirgigem Gelände die stereoskopische Auswertung des Bildinhaltes.

Diese Vorgänge, welche besondere Fachkenntnisse, Erfahrungen und Schnelligkeit erfordern, sollen einem Privatunternehmen übertragen werden, während dem Finanzministerium die Festlegung der Eigentumsgrenzen, Identifizierung und Numerierung der Parzellen, Flächenberechnung, Abgrenzung und Klassifikation der Parzellenteile, Bestimmung der Bonität und die Einschätzung vorbehalten bliebe.

Um die ganze Aufnahmearbeit in fünf Jahren durchführen zu können, würde die Unternehmung das Land in zehn verschiedenen Zonen bearbeiten, deren jede möglichst derartige klimatologische Verhältnisse hätte, die das gleichzeitige Fliegen zu beliebigen Jahreszeiten erlauben würden (vgl. Abb. 1).

Ü bersicht d e r z u v e r m e s s e n d e n Z o n e n :

Zone	Provinzen	Anzahl der Gemeindegebiete	Flächeninhalt ha
I	Coruña—Lugo	161	1,778.333
II	Pontevedra—Orense—Zamora	331	1,780.778
III	Asturien—León	313	2,627.167
IV	Santander—Palencia—Burgos—Valladolid	755	2,541.894
V	Logroño—Soria—Zaragoza	779	3,116.621
VI	Guadalajara—Teruel—Cuenca	627	2,989.537
VII	Huesca—Lérida	687	2,729.956
VIII	Gerona—Barcelona—Tarragona— —Balearische Inseln	815	2,500.892
IX	Zentrum und Süden Spaniens	461	1,558.112
X	Kanarische Inseln	90	727.260
Zusammen . . .		5019	22,350.550

Innerhalb einer Zone würde die für den Flugbetrieb günstigste Provinzhauptstadt als Standort gewählt werden und jede solche Zweigstelle nach dem folgenden Schaubild (Abb. 3) organisiert sein.

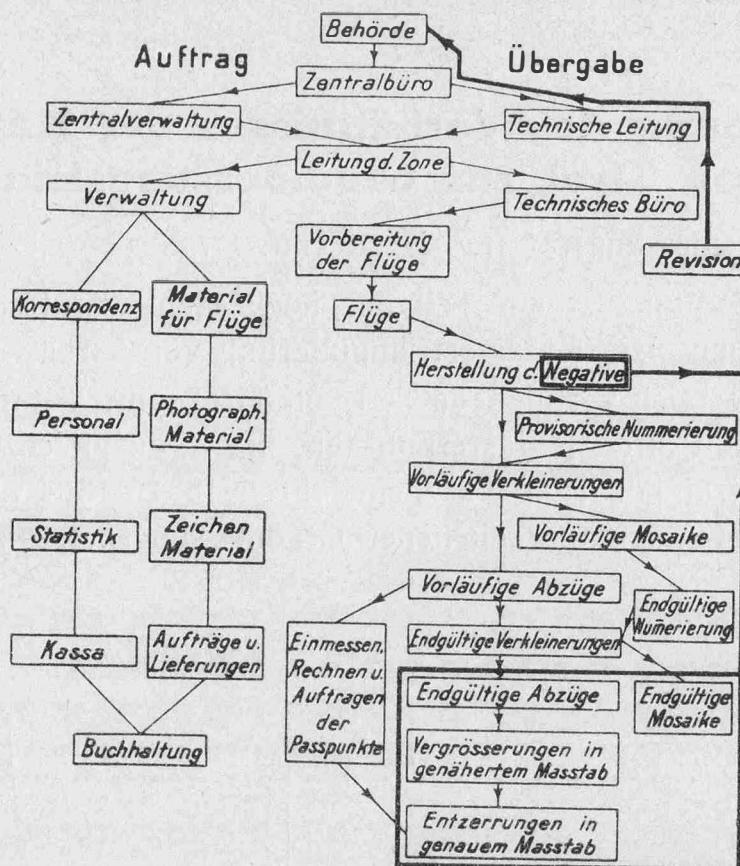


Abb. 3. — Schaubild der Organisation einer luftphotogrammetrischen Katasteraufnahme.

Die Übergabe der fertigen Pläne an das Finanzministerium soll nach Gemeindegebieten und in folgendem Ausmaß vor sich gehen:

1½ Jahre nach Arbeitsbeginn	2,0 Millionen ha
Während des folgenden Jahres	6,5 „ „ „
Während des zweitfolgenden Jahres . . .	7,0 „ „ „
Während des drittfolgenden Jahres . . .	6,8 „ „ „
Zusammen . . .	
22,3 Millionen ha.	

Die von der Unternehmung zu liefernden Arbeitsergebnisse wären folgende:

1. Die photographischen Originalnegative, numeriert und mit den Aufnahmedaten versehen.
2. Je eine Kontaktkopie auf feinkörnigem Papier mit Hochglanz.
3. Ein Übersichtsmosaik eines jeden Gemeindegebietes im ungefähren Maßstabe 1: 25.000, matt auf grobkörnigem Papier, mit eingetragenen Namen von Flüssen, Wegen usw.
4. Ein ähnliches Mosaik wie das vorhergehende im Maßstabe der Originalphotographien, blattweise.
5. Photographische Vergrößerungen im ungefähren Maßstabe 1: 4000 oder 1: 5000, matt auf grobkörnigem Papier.
6. Photographische Vergrößerungen (Entzerrungen) im genauen Maßstabe 1: 1000, 1: 2000 oder 1: 5000, matt auf grobkörnigem Papier und im Format 65×65 cm.
7. Ein Situationsplan von jeder Provinz im Maßstabe 1: 100.000 oder, wo ein solcher noch nicht vorhanden ist, eine Planskizze, mit Angabe der Gemeindegebiete.

Die Bestimmung des Verhältnisses der Katastertriangulierung von Tirol zur Gradmessungstriangulierung.

Von Vermessungsrat Ing. Dr. techn. H. Rohrer, Wien.

Diese Abhandlung ist ein Teil der noch nicht veröffentlichten Studie des Verfassers über „Die Katastertriangulierung von Tirol“.

Der bei Österreich verbliebene Teil von Tirol samt Vorarlberg weist eine größere Anzahl von alten Katasterpunkten, bzw. von gleichzeitigen Punkten der alten Militärtriangulierung aus den Jahren 1851—1854 auf, die mit den Punkten des bestehenden ausgeglichenen Gradmessungsnetzes zusammenfallen.

Der Katastertriangulierung v. Tirol
zu Grunde liegendes Dreiecksnetz I. Ordnung.

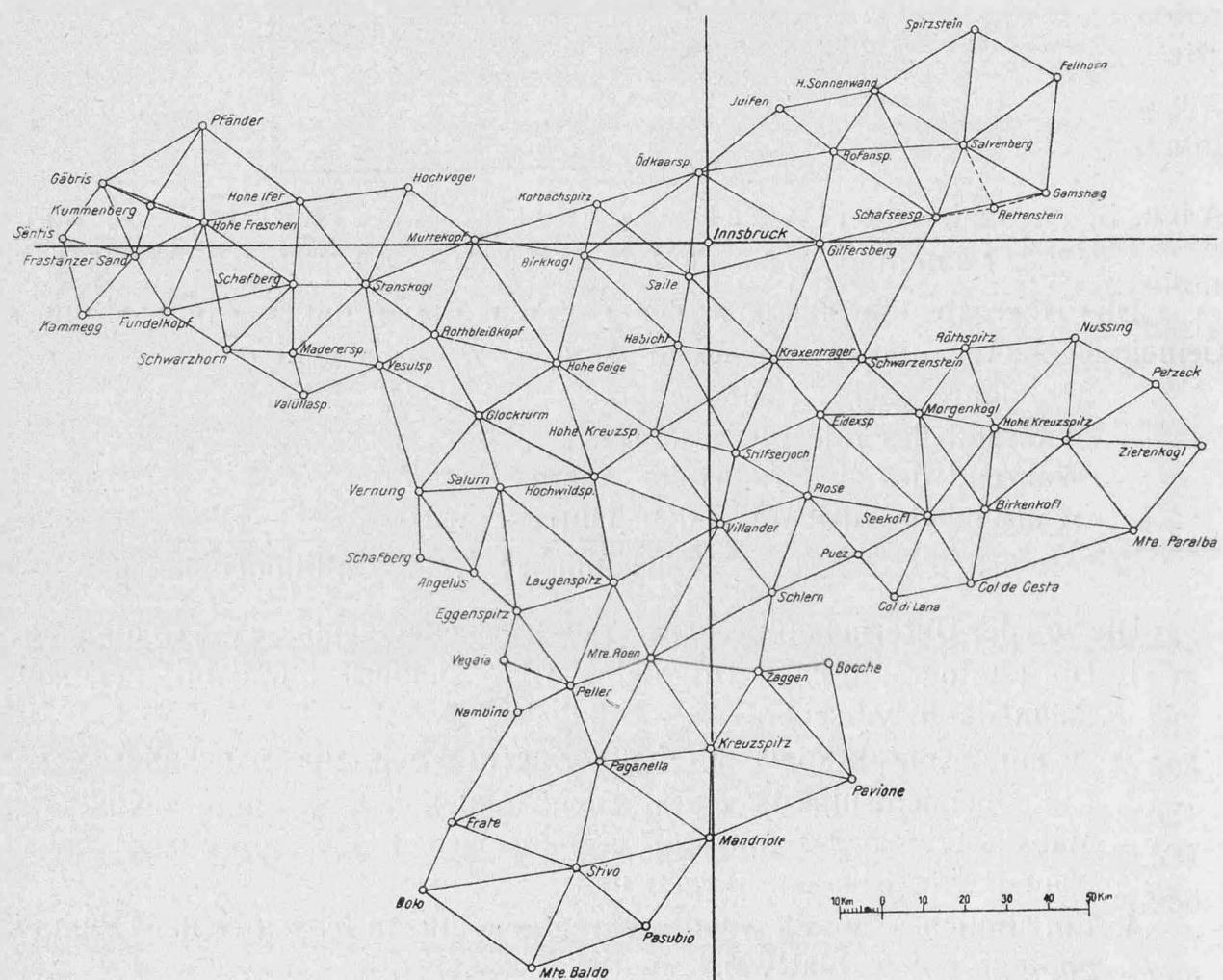


Abb. 1.

Hingegen weicht das Gradmessungsnetz der ehemaligen Monarchie im heutigen italienischen Teil von Tirol von dem alten, dem Kataster zugrundeliegten Netz I. Ordnung, erheblich ab¹⁾.

¹⁾ Siehe 1. Abbildung.

Während es also im österreichischen Teil von Tirol möglich ist, auf Grund der vorhandenen topographischen Beschreibungen und der ausgeführten Messungen identische Punkte beider Triangulierungen aufzufinden, läßt sich im italienischen Teile die Identität auch von den wenigen, namentlich zusammenfallenden Punkten nicht mit Sicherheit feststellen.

Nach Untersuchungen des Verfassers sind 24 Punkte der Katastertriangulierung von Tirol mit den bestehenden Gradmessungspunkten ident.

Für die folgenden Betrachtungen werden die Punkte des ausgeglichenen Gradmessungsnetzes praktisch als fehlerfrei angenommen.

Von den 24 identen Punkten I. Ordnung sind sowohl die Katasterkoordinaten im System Innsbruck als auch die geographischen Koordinaten, letztere aus der im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen erfolgten endgültigen Ausgleichung des Tiroler Netzes, bekannt.

Es ist nun möglich, Soldner'sche sphäroidische Koordinaten aller gegebenen identen Gradmessungspunkte bezogen auf den Katasterursprung Innsbruck, südlicher Turm der Pfarrkirche²⁾, zu rechnen und diese Werte den Katasterkoordinaten, die als genäherte Soldner'sche angesehen werden können, vergleichsweise gegenüberzustellen.

Zur Rechnung der Soldner'schen Koordinaten aus geographischen Positionen sind die von Jordan, „Handbuch der Vermessungskunde“, III. Band, 6. Auflage 1923, S. 493, abgeleiteten Formeln und die dazu gehörenden Tabellen des Anhanges zu diesem Werk benutzt worden. Die Zählung der Koordinaten erfolgte hiebei den Formeln entsprechend mit $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten. Die diesbezüglichen Berechnungen sind hier weggelassen.

Die Berechnung jedes Punktes ist behufs Überprüfung doppelt ausgeführt, einmal mit dem Zwischenpunkte $\varphi = 47^\circ 00' 00\cdot0''$ und ein zweitesmal mit dem Zwischenpunkte $\varphi = 47^\circ 30' 00\cdot0''$.

Die auf diese Weise errechneten Soldner'schen Koordinaten sind den gegebenen Katasterkoordinaten der gleichen Punkte auf Seite 118 gegenübergestellt und die Differenzen $\triangle y$ und $\triangle x$ (Soldner-Kataster) ermittelt worden.

Um den Vergleich zu vereinfachen, ist die Zählung der Katasterkoordinaten dabei umgekehrt worden, so daß auch hier $+y$ nach Osten und $+x$ nach Norden gezählt wurde.

Die Unterschiede $\triangle x$ und $\triangle y$ sind zur besseren Übersicht in der Abb. 2 eingetragen. Eine bloße Betrachtung zeigt, daß eine Verschwenkung beider Systeme sowie eine Maßstabänderung vorhanden ist. Außerdem sind aber noch Einflüsse zu bemerken, die darauf zurückzuführen sind, daß die Katasterkoordinaten den sphärischen Abständen nur näherungsweise entsprechen. Sie erfüllen somit die Beziehungen für Soldner'sche Koordinaten y' und x' ,

²⁾ Die geographischen Koordinaten dieses Punktes sind vom Verfasser im Anschlusse an die zunächst gelegenen Punkte des ausgeglichenen Gradmessungsnetzes neu mit $47^\circ 16' 11\cdot3066''$ nördl. Breite und $29^\circ 03' 39\cdot3167''$ östl. Länge von Ferro berechnet worden.

wenn beide Koordinaten des Ausgangspunktes Null sind, nach Jordan, III. Bd., 6. Aufl., Formel 4), Seite 274:

$$\left. \begin{array}{l} y' = v - \frac{u^2 v}{6 r^2} \\ x' = u + \frac{u v^2}{3 r^2} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 1)$$

worin $u = s \cos \alpha$ und $v = s \sin \alpha$ bedeuten, nur zum Teil.

Statt u und v kann in den 2. Gliedern der Formel 1) x und y eingeführt werden.

Darstellung der Koordinatenunterschiede Soldner-Kataster.

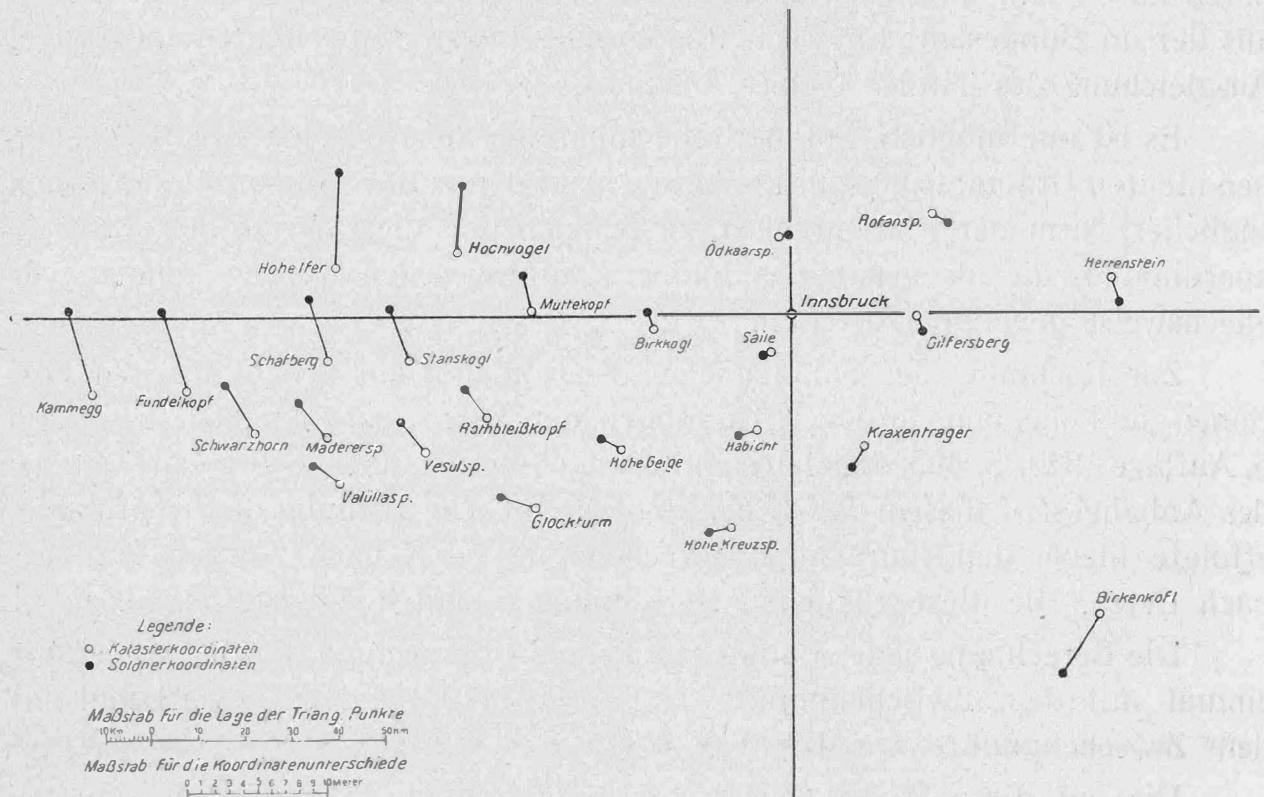


Abb. 2.

Um die Soldner'schen Koordinaten zu erhalten, wird es also notwendig sein, die Katasterkoordinaten mit einem Faktor für die Maßstabsänderung zu multiplizieren, eine Transformation um den Verschwenkungswinkel der beiden Systeme durchzuführen und schließlich noch in Berücksichtigung zu ziehen, daß im 2. Glied der Formel 1) für y' , bzw. x' infolge der seinerzeitigen näherungsweisen Berechnung Reste verbleiben werden, die durch $x^2 y C$, bzw. $xy^2 D$ dargestellt werden können.

Da die Verschwenkung sehr gering und der Maßstäblichkeitsfaktor nahezu 1 ist, kann nun folgende genähert geltende Beziehung aufgestellt werden. Hierin bedeuten y und x die Katasterkoordinaten in der früher angegebenen Zählung, also gleichgerichtet den Soldner'schen y' und x' , ϵ den kleinen Verschwenkungswinkel und $1 + q$ den Faktor der Maßstabsänderung.

$$\left. \begin{array}{l} y' = (1 + q) y \cos \epsilon - (1 + q) x \sin \epsilon - y x^2 C \\ x' = (1 + q) x \cos \epsilon + (1 + q) y \sin \epsilon + x y^2 D \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \quad 2)$$

In diesen Formeln kann noch bei der vorhandenen geringen Verschwenkung in den ersten Gliedern der Formeln 2) $\cos \varepsilon = 1$ und im zweiten Gliede der Faktor $(1 + q) = 1$ und $\sin \varepsilon = \widehat{\varepsilon}$ gesetzt werden. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} y' &= (1 + q) y - x \widehat{\varepsilon} - x^2 y C \\ \text{und } x' &= (1 + q) x + y \widehat{\varepsilon} + x y^2 D. \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad 3)$$

Da y' (Soldner) und y (Kataster), bzw. x' und x nicht sehr verschiedene Werte sind, kann man einführen:

$$\begin{aligned} y' &= + \triangle y \text{ und} \\ x' &= x + \triangle x. \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad 4)$$

Diese Werte in 2) eingesetzt ergeben:

$$\begin{aligned} y + \triangle y &= (1 + q) y - x \widehat{\varepsilon} - x^2 y C \\ x + \triangle x &= (1 + q) x + y \widehat{\varepsilon} + x y^2 D \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad 5)$$

daraus ist

$$\begin{aligned} \triangle y &= q y - x \widehat{\varepsilon} - x^2 y C \\ \triangle x &= q x + y \widehat{\varepsilon} + x y^2 D. \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad 6)$$

In diesen Gleichungen, von welchen jeder Punkt ein Paar liefert, sind q , ε , C und D unbekannt, die y und x sind die bekannten Katasterkoordinaten.

Es sind demnach jetzt vier Unbekannte zu berechnen: q , ε , C und D , welche auf Grund der Beziehungen von zwei trigonometrischen Punkten (zwei Doppelgleichungen) einfach bestimmt sind.

Da 24 Punkte für den Vergleich herangezogen werden können, ergibt dies Überbestimmungen, welche nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen sind.

Der Punkt 1 mit y_1 und x_1 liefert die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} v_{y1} &= y_1 q - x_1 \widehat{\varepsilon} - x_1^2 y_1 C - \triangle y_1 \\ v_{x1} &= x_1 q + y_1 \widehat{\varepsilon} + x_1 y_1^2 D - \triangle x_1. \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad 7)$$

Man erhält 24 Doppelfehlergleichungen von der vorstehenden Form. Nach dem Ausgleichsprinzip muß $[vv] = [v_x v_x] + [v_y v_y] = \text{Minimum}$ sein.

Die zugehörigen Normalgleichungen ergeben sich dann, wenn man bildet:

$$\frac{\partial [vv]}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial [vv]}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial [vv]}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial [vv]}{\partial D} = 0.$$

Wenn berücksichtigt wird, daß

$$([xy] - [yx]) = 0$$

ist, so entstehen daraus die folgenden Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \underline{[yy + xx]} q - [x^2 y^2] C + [x^2 y^2] D - [y \triangle y + x \triangle x] &= 0 \\ \underline{[yy + xx]} \widehat{\varepsilon} + [x^3 y] C + [xy^3] D + [x \triangle y - y \triangle x] &= 0 \\ \underline{[x^2 yx^2 y]} C + [x^2 y \triangle y] &= 0 \quad \dots \dots \dots \quad 8) \\ \underline{[x^2 yx^2 y]} D - [xy^2 \triangle x] &= 0 \end{aligned}$$

Die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen sowie der zugehörigen Gewichtsgleichungen ist hier, um Raum zu sparen, weggelassen.

Die Auflösung nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren ergibt die Werte der Unbekannten

$$q = + 803 \cdot 10^{-8}$$

$$\hat{\epsilon} = - 4798 \cdot 10^{-8} \text{ oder } \epsilon'' = - 9.896''$$

$$\begin{aligned} C &= + 133 \cdot 10^{-8} \\ D &= + 558 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{wobei } x^2y \text{ und } xy^2 \text{ in Kilometer-} \\ \text{einheiten zu nehmen sind.} \end{array} \right\}$$

Um auch eine durchgreifende Kontrolle für die Rechnung zu haben, ist das Quadrat der Absolutglieder ($[\Delta y \Delta y] + [\Delta x \Delta x]$) gebildet und nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren viermal reduziert worden. Die vierte Reduktion ergibt den Wert 13.50.

Mit den erhaltenen Werten der Unbekannten q und ϵ sind dann die einzelnen Verbesserungen v_y und v_x für jeden Punkt auf Grund der Formel 7 ermittelt worden. (Siehe Seite 115.)

Die Summe der Quadrate ($[v_y v_y] + [v_x v_x]$) auf Grund der Fehlergleichungen ergibt 13.42, was mit dem aus der vierten Reduktion der Quadrate der Absolutglieder erhaltenen Wert der Normalgleichungen gut übereinstimmt.

Da diese durchgreifende Probe erfüllt ist, kann die Rechnung als fehlerfrei angenommen werden.

Wir haben noch die mittleren Fehler der Unbekannten zu bestimmen.

Der mittlere Fehler m der Punktlage eines Punktes ergibt sich mit

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v_y v_y]}{24-2} + \frac{[v_x v_x]}{24-2}} = \pm \sqrt{\frac{13.42}{22}} = \underline{\pm 0.78 \text{ Meter.}}$$

Der mittlere Fehler von y , bzw. x ist:

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{1.563}{22}} = \pm 0.27 \text{ m}$$

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{11.852}{22}} = \pm 0.73 \text{ m.}$$

Somit beträgt der mittlere Fehler der Ordinate nahezu ein Drittel des Fehlers der Abszisse. Das deutet darauf hin, daß der Abszissenwert durch den näherungsweisen Rechnungsvorgang, der bei der alten Katastertriangulierung angewendet wurde, besonders unsicher bestimmt worden ist.

Zur Ermittlung der mittleren Fehler der Unbekannten q , $\hat{\epsilon}$, C und D wurden weiters die Gleichungen für die Gewichtskoeffizienten

Q_{11} der Unbekannten q

Q_{22} „ „ „ ϵ

Q_{33} „ „ „ C

Q_{44} „ „ „ D aufgestellt.

Die Gewichtsgleichungen für Q_{11} lauten:

$$\begin{aligned} [yy + xx] Q_{11} - [x^2 y^2] Q_{13} + [x^2 y^2] Q_{14} &= 1 \\ [yy + xx] Q_{12} + [x^3 y] Q_{13} + [xy^3] Q_{14} &= 0 \\ [x^2 yx^2 y] Q_{13} &= 0 \quad \dots \dots \quad 9) \\ [xy^2 xy^2] Q_{14} &= 0 \end{aligned}$$

und analog ergeben sich jene für Q_{22} , Q_{33} und Q_{44} .

Die Auflösung der Gewichtsgleichungen ist nicht für sich, sondern gemeinsam mit den Unbekannten durch Anhängen an die Normalgleichungen nach dem von Jordan, „Handbuch der Vermessungskunde“, Band I, 3. Auflage 1888, Seite 81 ff. entwickelten Verfahren ausgeführt worden.

Für die Gewichtskoeffizienten haben sich nachstehende Werte ergeben:

$$Q_{11} = 11\,07\,48 \cdot 10^{-16}$$

$$Q_{22} = 11\ 95\ 05 \cdot 10^{-16}$$

$$Q_{33} = 12\,05\,65 \cdot 10^{-16}$$

$$Q_{44} = 02\ 82\ 27 \cdot 10^{-6}.$$

Die mittleren Fehler der Unbekannten folgen daraus mit

$$M_q = \pm m \sqrt{Q_{11}} = \pm 256 \cdot 10^{-8}$$

$$M_{\hat{\varepsilon}} = \pm m \sqrt{Q_{22}} = \pm 270 \cdot 10^{-8}$$

$$M_C = \pm m \sqrt{Q_{33}} = \pm 271 \cdot 10^{-8}$$

$$M_D = \pm m \sqrt{\overline{Q}_{44}} = \pm 131 \cdot 10^{-8}.$$

Für eine Dreiecksseite wird der mittlere Fehler $\pm 0.78 \sqrt{2} = \pm 1.10$ m, d. i. bei der gefundenen mittleren Seitenlänge von 24.1 km ein Verhältnis von $\frac{1}{22\,000}$.

Dieses bei der Umwandlung der Katasterkoordinaten in Soldner'sche Koordinaten erzielte Genauigkeitsverhältnis ist für praktische Zwecke hinreichend.

Auf Grund der Untersuchung lassen sich folgende Ergebnisse feststellen:

Der aus dem Gradmessungsnetz abgeleitete Meridian durch den Koordinatennullpunkt Innsbruck ist gegenüber der Abszissenachse des Tiroler Katastersystems um einen Winkel von $\varepsilon'' = -9\cdot896'' \pm 0\cdot557''$ verdreht.

Das Längenverhältnis Gradmessungsnetz :Kataster ist gleich:

$$(1 + q) = 1 + (803 \pm 256) \cdot 10^{-8}.$$

Mit Hilfe der gefundenen Beziehungen ist es nunmehr möglich, einzelne Punkte der Katastertriangulierung von Tirol, die koordinatenmäßig gegeben sind, in streng Soldner'sche Koordinaten bezogen auf den abgeleiteten Meridian des Ursprungs Innsbruck überzuführen.

Umgekehrt können solche Soldner'sche Koordinaten in Katasterkoordinaten verwandelt werden.

Wenn alle Koordinaten positiv nach Norden, bzw. Osten gezählt, demnach die Katasterkoordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen eingeführt werden, so bestehen nach der früheren Gleichung 3) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} y' &= y + qy - x\widehat{\varepsilon} - x^2y \ C \\ x' &= x + qx + \gamma\widehat{\varepsilon} + x^2y \ D. \end{aligned} \quad \quad (10)$$

Für die Berechnung von Katasterkoordinaten aus rechtwinkelig-sphärischen (Soldner'schen) gilt dann umgekehrt:

$$\begin{aligned} y &= y' - qy' + x'\bar{\epsilon} + x'^2y'C \\ x &= x' - qx' - y'\bar{\epsilon} - x'y'^2D \end{aligned} \quad \quad (11)$$

Name der Punkte	Katasterkoordinaten		Soldner-Koordinaten		Unterschiede Soldner-Kataster		v_y in m	v_x in m
	y	x	y'	x'	$\triangle y$ in m	$\triangle x$ in m		
Birkkogl	- 29.900·28	- 4.068·42	- 29.900·74	- 4.067·41	- 0·46	+ 1·01	+ 0·03	+ 0·37
Fundelkopf	- 130.334·00	- 16.267·95	- 130.335·74	- 16.262·31	- 1·74	+ 5·64	- 0·04	- 1·06
Gilfersberg	+ 26.427·25	- 89·90	+ 26.427·74	- 90·93	+ 0·49	- 1·03	- 0·28	- 0·34
Glockturm	- 55.500·81	- 41.540·52	- 55.503·38	- 41.539·64	- 2·57	+ 0·88	+ 0·26	+ 0·74
Habicht	- 7.922·22	- 25.050·59	- 7.923·66	- 25.050·95	- 1·44	- 0·36	+ 0·18	+ 0·53
Hochvogel	- 72.267·68	+ 12.796·19	- 72.267·27	+ 12.800·92	+ 0·41	+ 4·73	- 0·36	- 0·78
Hohe Geige	- 36.894·70	- 29.284·56	- 36.896·20	- 29.283·83	- 1·50	+ 0·73	- 0·15	+ 0·58
Hohe Ifer	- 97.754·01	+ 10.313·82	- 97.753·97	+ 10.320·66	+ 0·04	+ 6·84	- 0·31	- 1·52
Kamegg	- 149.610·77	- 16.791·34	- 149.612·47	- 16.785·37	- 1·70	+ 5·97	- 0·25	- 0·99
Kraxentrager	+ 14.913·74	- 29.314·83	+ 14.913·00	- 29.916·23	- 0·74	- 1·40	- 0·56	+ 0·41
Madererspitze	- 100.649·77	- 26.305·20	- 100.651·75	- 26.302·66	- 1·98	+ 2·54	0·00	+ 0·59
Muttekopf	- 56.155·75	+ 66·98	- 56.156·22	+ 69·58	- 0·47	+ 2·60	+ 0·02	+ 0·10
Ödkarspitze	+ 2.309·57	+ 15.926·38	+ 2.310·20	+ 15.926·47	+ 0·63	+ 0·09	+ 0·15	- 0·08
Rohan	+ 30.116·67	+ 21.023·01	+ 30.117·78	+ 21.022·37	+ 1·11	- 0·64	+ 0·12	+ 0·47
Rotbleißkopf	- 65.713·79	- 22.216·31	- 65.715·42	- 22.214·18	- 1·63	+ 2·13	+ 0·08	+ 0·31
Saile	- 5.213·63	- 8.566·60	- 5.214·10	- 8.566·63	- 0·47	- 0·03	+ 0·02	+ 0·21
Schafberg Vorarlberg . .	- 99.912·59	- 9.746·53	- 99.913·90	- 9.741·97	- 1·31	+ 4·56	+ 0·05	- 0·38
Schwarzhorn	- 115.804·25	- 25.186·32	- 115.806·24	- 25.182·75	- 1·99	+ 3·57	- 0·05	- 0·10
Stanskogl	- 82.547·54	- 10.077·47	- 82.548·81	- 10.073·87	- 1·27	+ 3·60	+ 0·14	- 0·10
Vallüla	- 97.533·65	- 36.106·20	- 97.535·64	- 36.104·91	- 1·99	+ 1·29	- 0·35	+ 1·18
Vesulspitze	- 79.460·13	- 29.213·54	- 79.462·02	- 29.211·49	- 1·89	+ 2·05	- 0·06	- 0·50
H. Kreuzspitze	- 13.681·41	- 46.044·58	- 13.683·07	- 46.044·73	- 1·66	- 0·15	- 0·52	+ 0·39
Rettenstein	+ 68.204·82	+ 7.489·74	+ 68.205·50	+ 7.487·90	+ 0·68	- 1·84	+ 0·23	- 1·18
Birkenkofl	+ 66.044·11	- 65.120·87	+ 66.041·36	- 65.125·07	- 2·75	- 4·20	+ 0·49	- 1·08

$$[v_y \ v_y] = 1\cdot563 \quad [v_x \ v_x] = 11\cdot852$$

$$[vv] = [v_x \ v_x] + [v_y \ v_y] = 13\cdot42$$

Zur rascheren Ermittlung der Korrektionsglieder x^2yC , xy^2D , bzw. $x'^2y'C$ und $x'y'^2D$ können Tabellen benutzt werden, welche es ermöglichen, diese Ausdrücke mit dem Argument x und y zu entnehmen.

Im nachstehenden seien für einen in Katasterkoordinaten (verkehrte Zählung) gegebenen Punkt die Umwandlung in Soldner'sche, bezogen auf das Gradmessungssystem im Ursprung Innsbruck, durchgeführt.

$$\begin{array}{ll}
 y & = -120.000\cdot000 \text{ m} \\
 + qy & = -0.964 \text{ ,} \\
 - x\bar{\epsilon} & = +2.399 \text{ ,} \\
 \hline
 ^3) -x^2y.C & = +0.399 \text{ ,} \\
 \hline
 y' & = -119.998.166 \text{ m}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 x & = +50.000\cdot000 \text{ m} \\
 + qx & = +0.401 \text{ ,} \\
 + y\bar{\epsilon} & = +5.757 \text{ ,} \\
 \hline
 ^3) +xy^2.D & = +4.018 \text{ ,} \\
 \hline
 x' & = +50.010.176 \text{ m}
 \end{array}$$

Im allgemeinen werden aber die Soldner'schen Koordinaten y' , x' nicht interessieren, sondern die winkeltreuen Gauß'schen Koordinaten bezogen auf die für Tirol in Betracht kommenden Meridianstreifen M 28, bzw. M 31 östlich von Ferro der neuen österreichischen Katasterprojektion.

Die Aufgabe der direkten Umwandlung der Katasterkoordinaten in winkeltreue der Meridianstreifen sowie die Rückführung hat der Verfasser in seiner Studie nach dem Vorbild der Abhandlung von Dr. Ing. Clauhs, „Umwandlung der bayerischen Landeskoordinaten in Gauß-Krüger-Koordinaten der deutschen Meridianstreifen 9° und 12° “ gelöst. Dieser Teil der Arbeit wird Gegenstand einer eigenen Veröffentlichung bilden.

³⁾ In diesen Gliedern sind die Koordinaten y und x in Kilometereinheiten anzusetzen. Die Berechnung der Teilprodukte erfolgte mittels Rechenmaschine.

Über Schwerpunkt-Beziehungen bei einem fehlerzeigenden Vielecke.

Von Hofrat Professor Dr., Dr. Ing. e. h. R. Schumann, Wien.

Bei manchen Punktbestimmungs-Aufgaben treten fehlerzeigende Viel-ecke (f. V.) auf, deren Ecken von gleichberechtigten Näherungs-Örtern des ge-suchten Punktes gebildet werden. Zur Lösung der Aufgabe: den plausibelsten Punkt zu bestimmen, wird die Forderung aufgestellt, die Quadratsumme seiner Abstände von den Näherungs-Örtern solle ein Minimum werden, welche Bedin-gung vom Schwerpunkt erfüllt wird. Da sowohl Strecken wie Richtungen gesucht sind, liegt es nahe, die Aufgabe vektorisch anzufassen. Dementsprechend wird im Abschnitt I zunächst der Schwerpunkt des f. V. zeichnerisch wie rechne-risch bestimmt.

Ein hiebei auftretender, von einer Ecke des f. V. nach dem Schwerpunkte führender Polygonzug hat genähert die Gestalt einer Spirale; vom regelmäßigen n -Eck ausgehend, wird im Abschnitt II eine Untersuchung angeschlossen über die dem Kreise entsprechende Kurve.

I

Seiten und Winkel des f. V. werden als bekannt vorausgesetzt; die Ecken seien $1, 2, \dots, n$, die Seiten $w_{12}, w_{23}, \dots, w_{n1}$. Von den Ecken führen die Strahlen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n$ zum gesuchten Punkte.

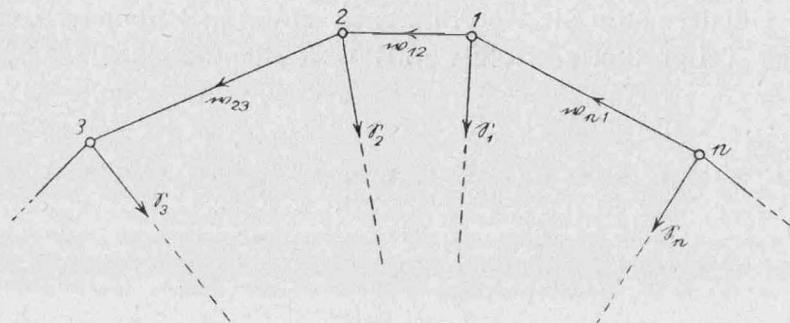


Abb. 1.

Dann bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{S}_i = S_i \cdot \bar{\mathfrak{S}}_i, \quad \mathfrak{w}_i = w_i \cdot \bar{\mathfrak{w}}_i, \quad [\mathfrak{w}_i]_1^n = 0, \quad \dots, \quad [\mathfrak{w}_i]_{n-1}^n = 1)$$

wo die eckige Klammer wie üblich Summation bedeutet; ferner:

$$+\mathfrak{S}_2-\mathfrak{S}_1+\mathfrak{w}_{12}=0, \quad +\mathfrak{S}_3-\mathfrak{S}_2+\mathfrak{w}_{23}=0, \dots \quad +\mathfrak{S}_n-\mathfrak{S}_1+\mathfrak{w}_{n1}=0. \quad . \quad 2)$$

Die erweiterte Minimums-Bedingung lautet:

Hier bedeuten \mathfrak{S} einen Vektor, S seinen Betrag, \mathfrak{s} seinen Einheits-Vektor, Hohlklammern (\mathbb{C}, \mathbb{D}) skalare Multiplikation der beiden durch ein Komma getrennten Vektoren: die \mathfrak{f} sind Korrelat-Vektoren.

In bekannter Weise erhält man für die Unbekannten s_1, \dots, s_n und f_1, \dots, f_n die beiden Systeme von Normalgleichungen:

Aus 4) ergibt sich als wichtige Eigenschaft des S-Büschenls:

Nach 1) und 6) sind die f und die S unter sich nicht unabhängig.

Um 5) übersichtlich aufzulösen, multipliziert man die Gleichungen nach bekanntem Vorgange der Reihe nach mit verfügbaren Faktoren $v_1 \dots v_n$, addiert die Produkte und fasse nach den \mathfrak{f} zusammen. Es ist dann zweckmäßig, den v die Bedingungen aufzuerlegen:

Über ein \mathfrak{k} und zwei ν darf man verfügen. Es sei:

auch die Wahl $\nu_1 = +1$ führt zu einer brauchbaren Lösung.

Dann folgt aus 7):

$$\begin{aligned} v_{n-2} &= +2, \quad \dots \dots \dots \\ v_{n-3} &= +3, \quad v_2 = n-2, \quad n \cdot f_1 + [v \cdot w]_1^n = 0. \quad \dots \dots \dots (9) \\ \dots \dots \dots & \quad v_1 = n-1, \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus 4):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= + \frac{1}{n} [\nu \cdot \mathfrak{w}]_1^n \\ &= + \mathfrak{w}_{12} \cdot \frac{n-1}{n} + \mathfrak{w}_{23} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \dots + \mathfrak{w}_{(n-1)n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= - \mathfrak{w}_{12} \cdot \frac{1}{n} - \mathfrak{w}_{23} \cdot \frac{2}{n} \dots \dots - \mathfrak{w}_{(n-1)n} \cdot \frac{n-1}{n} - \mathfrak{w}_{n1}. \end{aligned} \quad \left. \right\} 10)$$

Es ergeben sich hiernach 2 Polygonzüge von der Ecke 1 aus, beide führen zum Schwerpunkte des Systems der n -Punkte 1, 2, ..., n . Um die vorliegende Aufgabe geometrisch zu lösen, ist demnach nur nötig: Unterteilung der $n - 1$ unabhängigen Widersprüche w_{12} bis $w_{(n-1)n}$ und entsprechendes Parallel-Abschie-

ben. Im übrigen kann jede Ecke als erste genommen werden. Man sieht auch, daß durch Addition von: $\lambda \cdot [w]_1^n$, wo λ beliebig ist, weitere geometrische Wege in Gestalt von Polygonzügen nach dem Schwerpunkt gezeichnet werden können.

Will man einen Vektor S , z. B. S_1 , numerisch ermitteln, so spaltet man seine vektorische Gleichung:

$$n \cdot S_1 = v_1 \cdot w_{12} + \dots + v_{n-1} \cdot w_{(n-1)n},$$

d. h. man multipliziert sie zunächst mit dem Ergänzungs-Einheitsvektor $|S_1|$ skalar links; es folgt:

$$0 = +v_1 \cdot w_1 \cdot \sin(S_1 w_{12}) + \dots + v_{n-1} \cdot w_{n-1} \cdot \sin(S_1 w_{(n-1)n}).$$

Zerlegt man

$$\not\propto(S_1 w_i) \text{ in } \not\propto(S_1 w_1) + \not\propto(w_1 w_i)$$

und entwickelt den Sinus der Summe, so erhält man:

$$\operatorname{tg}(S_1 w_1) = -\frac{[v_i \cdot w_i \cdot \sin(w_1 w_i)]}{[v_i \cdot w_i \cdot \cos(w_1 w_i)]}. \quad \dots \dots \dots \quad 11)$$

Damit werden die Winkel zwischen allen S und w bekannt.

Um zweitens den Betrag S zu finden, multipliziert man seine Gleichung mit dem Einheitsvektor S skalar links; es wird z. B. für S_1 :

$$n \cdot S_1 = [v_i \cdot w_i \cdot \cos(S_1 w_i)]. \quad \dots \dots \dots \quad 12)$$

II.

Wendet man das in I angegebene Verfahren, den Schwerpunkt zu erzeichnen, auf ein nahezu regelmäßiges Vieleck an, so sieht man, daß die Gestalt des Polygonzuges aus den Vektoren $v \cdot w$ spiraling ist; als Beispiel diene ein Sechseck:

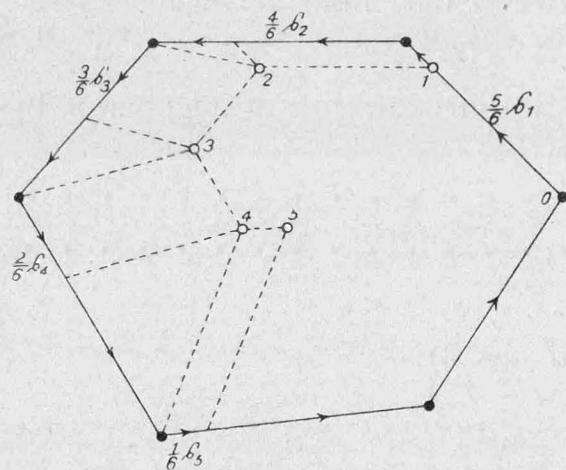


Abb. 2.

Bei einem regelmäßigen Vieleck ist man zwar der Suche nach dem Schwerpunkt enthoben; indes drängt sich hier die Frage nach der Art der zugehörigen Spirale auf, welche Frage insbesondere für den Grenzfall $n = \infty$ beantwortet werden soll.

Der einem regelmäßigen n -Eck umschriebene Kreis habe

den Radius r , nach der i -ten Ecke führe der Radiusvektor $\bar{r}_i = r \cdot \bar{r}_i$, | 13) eine Seite sei $\bar{s}_i = s \cdot \bar{s}_i$, die analytische Amplitude sei α_i .

Der Polygonzug nach dem Schwerpunkt (Mittelpunkt) hat ebenfalls n -Ecken, nach seiner i -ten Ecke führe der Radiusvektor $\bar{t}_i = t_i \cdot \bar{t}_i$, die Amplitude sei φ_i . Die Polygonseiten sind:

$$\frac{n-1}{n} \cdot \bar{s}_1, \quad \frac{n-2}{n} \cdot \bar{s}_2, \quad \dots \dots \quad \frac{1}{n} \cdot \bar{s}_{n-1}.$$

Dann ist:

$$\bar{t}_i = \bar{r}_0 + \frac{n-1}{n} \cdot \bar{s}_1 + \frac{n-2}{n} \cdot \bar{s}_2 + \dots \dots + \frac{n-i}{n} \cdot \bar{s}_i, \quad \dots \dots \quad 14)$$

welche Gleichung rechts nur bekannte Vektoren enthält.

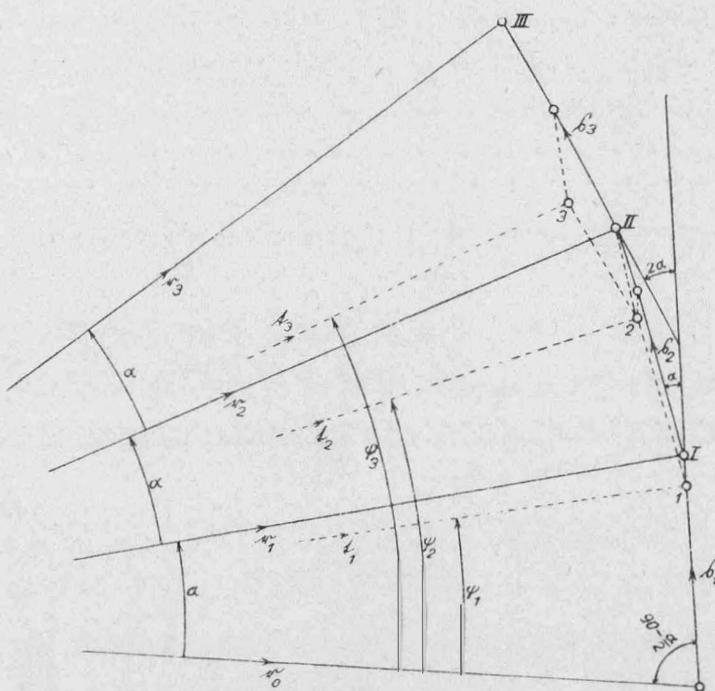


Abb. 3.

In Figur 3 wie in 14) sind die Winkel analytisch, d. h. gegen den Uhrzeigersinn zu zählen.

Gleichung 14) kann geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_i &= \bar{r}_0 + \bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \dots \dots + \bar{s}_i \\ &\quad - \frac{1}{n} \bar{s}_1 - \frac{2}{n} \bar{s}_2 - \dots \dots - \frac{i}{n} \bar{s}_i. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \quad 14a)$$

Um zu den gebräuchlichen rechtwinkligen Koordinaten x_i und y_i zu gelangen, multipliziere man 14a) skalar links mit \bar{r}_0 (oder mit \bar{x}), sodann mit: $|\bar{r}_0|$ (oder mit $|\bar{x}|$ oder mit \bar{y}); dann wird:

$$\left. \begin{aligned} t_i \cdot \cos(\bar{r}_0 \cdot \bar{t}_i) &= x_i = r + s \cdot \sum_1^i \cos(\bar{r}_0 \cdot \bar{s}_k) - s \cdot \sum_1^i \frac{k}{n} \cdot \cos(\bar{r}_0 \cdot \bar{s}_k), \\ t_i \cdot \sin(\bar{r}_0 \cdot \bar{t}_i) &= y_i = s \cdot \sum_1^i \sin(\bar{r}_0 \cdot \bar{s}_k) - s \cdot \sum_1^i \frac{k}{n} \cdot \sin(\bar{r}_0 \cdot \bar{s}_k). \end{aligned} \right\} \quad 15)$$

Wird n groß, so tritt an Stelle von s das Bogenelement $ds = r \cdot dx$, ferner wird $\frac{k}{n} = \frac{\alpha k}{2\pi}$; es entstehen laufende Koordinaten: t , φ und x , y . Aus 15) wird nach Ausführung der Integration:

$$\left. \begin{aligned} t \cdot \cos \varphi &= x = & + r \cdot \cos \alpha - \frac{r}{2\pi} \cdot \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{r}{2\pi} \cdot \sin \alpha, \\ t \cdot \sin \varphi &= y = & + \frac{r}{2\pi} + r \cdot \sin \alpha - \frac{r}{2\pi} \cdot \alpha \cdot \sin \alpha - \frac{r}{2\pi} \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad 16 \text{ a})$$

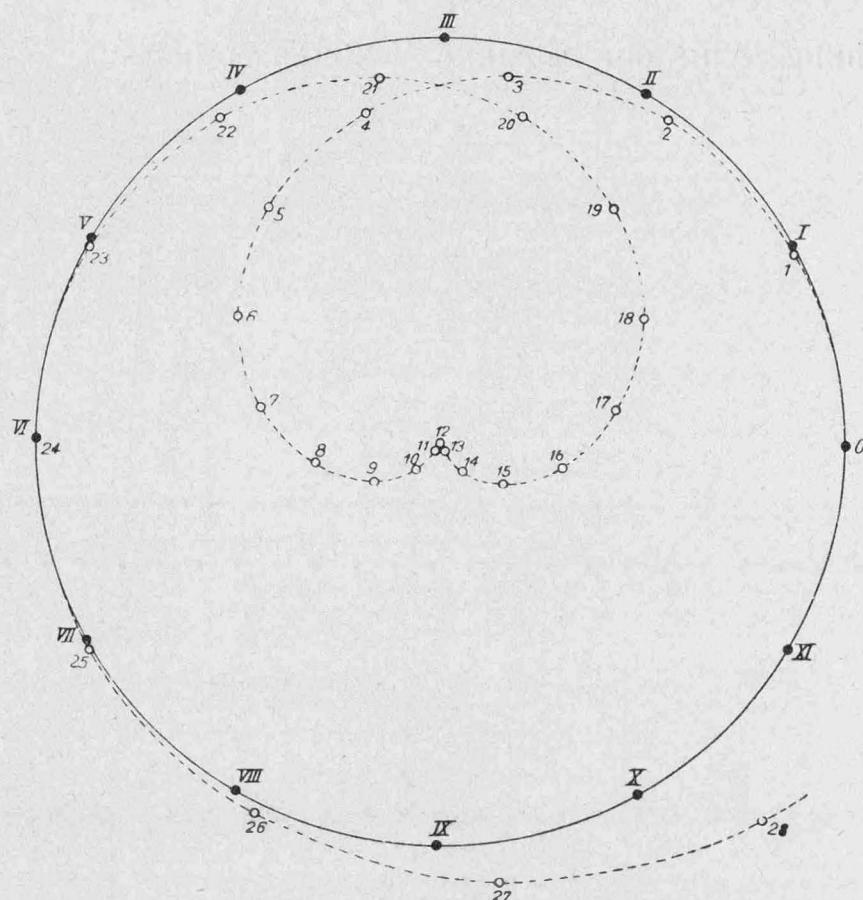


Abb. 4.

Den Verlauf der Kurve zeigt Abb. 4 für Werte von α , die um je 30° wachsen; einige ihrer Eigenschaften seien hier besprochen. Multipliziert man die erste Gleichung 16) mit $\sin \alpha$, die zweite mit $-\cos \alpha$; sodann die erste mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$ und addiert jedesmal, so folgen die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -\left(y - \frac{r}{2\pi}\right) \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha &= \frac{r}{2\pi}, \\ +\left(y - \frac{r}{2\pi}\right) \cdot \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha &= r - \frac{r}{2\pi} \cdot \alpha. \end{aligned} \right\} \dots \quad 16 \text{ b})$$

Läßt man α um 2π wachsen, so entstehen die Zuwächse:

$$\triangle x = -r \cdot \cos \alpha, \quad \triangle y = -r \cdot \sin \alpha,$$

mithin ist:

$$\triangle t = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} = r.$$

Man erkennt diese Eigenschaft aus der Abb. 4 daran, daß Punkte, deren Indices sich um 12 unterscheiden, den Abstand r haben.

Es ist:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{r}{2\pi} \cdot \sin \alpha \cdot (2\pi - \alpha), \quad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{r}{2\pi} \cdot \cos \alpha \cdot (2\pi - \alpha), \quad \dots \quad 17)$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \alpha. \quad \dots \quad 18)$$

Diese einfache Beziehung hängt eng zusammen mit der Konstruktion des Polygonzuges durch Parallel-Abschieben. Die Kurven-Tangente steht senkrecht auf dem Radius-Vektor nach dem Kreispunkte α .

Ist $d\sigma$ das Bogenelement, so folgt dafür aus 17):

$$d\sigma = \frac{r}{2\pi} \cdot (2\pi - \alpha) \cdot d\alpha,$$

mithin ist:

$$\sigma = r \cdot \alpha - \frac{r}{4\pi} \cdot \alpha^2. \quad \dots \quad 19)$$

Demgemäß ist die Länge des Kurvenbogens gleich dem halben Kreisumfang $r\pi$. Zur Bestätigung hiefür sei angeführt, daß der gleiche Wert durch Grenzübergang aus

$$\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) \cdot ds$$

folgt.

Für den Krümmungs-Radius ρ ergibt sich einfach:

$$\rho + r = \frac{r}{2\pi} \cdot \alpha; \quad \dots \quad 20)$$

hiebei bleibt zu beachten, daß α die Amplitude des Kreispunktes ist. Betrag t und Amplitude φ erhält man am bequemsten aus x und y nach 16 a).

Um den Winkel zwischen t_i und r_i zu finden, bringe man 14 a) auf die Form:

$$t_i = r_i - \frac{1}{n} \cdot s_1 - \frac{2}{n} \cdot s_2 - \dots - \frac{i}{n} \cdot s_i. \quad \dots \quad 14 b)$$

Spaltet man diese Gleichung mittels $\overline{|r_i|}$ und $\overline{r_i}$, so kommt:

$$\left. \begin{aligned} t_i \cdot \sin(t_i r_i) &= + \sum_{k=1}^i \frac{k}{n} \cdot s \cdot \sin(r_i s_k), \\ t_i \cdot \cos(t_i r_i) &= r - \sum_{k=1}^i \frac{k}{n} \cdot s \cdot \cos(r_i s_k). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad 21)$$

Für ein n -Eck mit dem Zentriwinkel $d\alpha$ ist:

$$\measuredangle(r_i s_k) = 90^\circ - \frac{d\alpha}{2} - (i-k) \cdot d\alpha,$$

nach dem Grenzübergang wird:

$$\left. \begin{aligned} t \cdot \sin(t r) &= \frac{r}{2\pi} (1 - \cos \alpha), \\ t \cdot \cos(t r) &= \frac{r}{2\pi} (2\pi - \alpha + \sin \alpha), \end{aligned} \right\} \quad \operatorname{tg}(t r) = \frac{1 - \cos \alpha}{2\pi - \alpha + \sin \alpha} \quad \dots \quad 22)$$

Die Berührung zwischen Kreis und Kurve ist eng bei 0 und VI. Geht von 2π bis 4π , so entsteht ein Spiegelbild der Kurve zur y -Achse (Abb. 4, Punkte 13—24); geht α über -2π bis -4π , so entsteht ein Spiegelbild zur x -Achse. Wächst α über 4π , so durchsetzt die Kurve den Kreis (Punkte 25 u. f.). Über ihren Verlauf im Kreise r gewinnt man an der Hand der Formeln und Zahlen in folgender Zusammenstellung eine gedrängte Übersicht:

α	$\operatorname{tg} \varphi$	φ	t	Bogenlänge in Teilen des Kreisumfanges
0°	0	$0^\circ 0'$	$= r \cdot 1,000$	σ
90	$\frac{2+3\pi}{2}$	80 4	$\frac{r}{4\pi} \cdot \sqrt{9\pi^2 + 12\pi + 8} = r \cdot 0,923$	$\frac{7}{32}$
180	$-\frac{2}{\pi}$	147 31	$\frac{r}{2\pi} \cdot \sqrt{\pi^2 + 4} = r \cdot 0,593$	$\frac{12}{32}$
270	$\frac{\pi-2}{2}$	209 43	$\frac{r}{4\pi} \cdot \sqrt{\pi^2 - 4\pi + 8} = r \cdot 0,181$	$\frac{15}{32}$
360	∞	270 0	0	$\frac{16}{32}$

* * *

Meinem werten Kollegen, Herrn Dr. Duscheck, verdanke ich den Hinweis auf die Ähnlichkeit der Gleichungen 16) mit denen der Kreisevolventen; auch diese Beziehungen weiter zu verfolgen, überschreitet den Rahmen vorliegender Untersuchung.

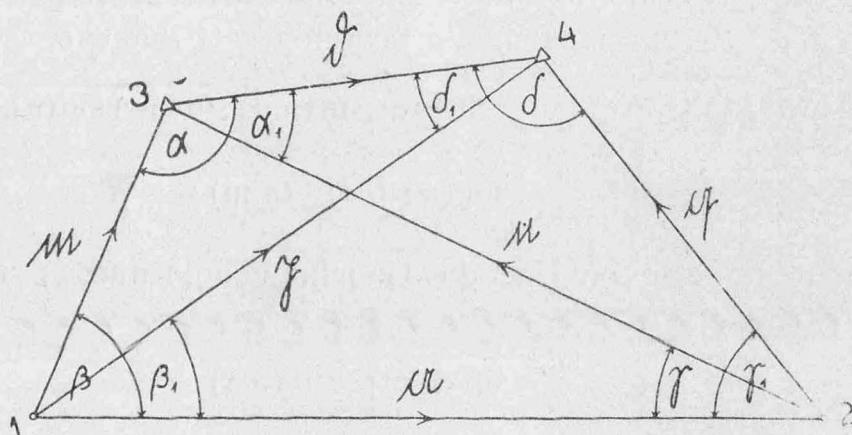
Die „Aufgabe des unzugänglichen Abstandes“ (Hansen-Problem) in vektoranalytischer Behandlung.

Von Professor Ing. J. Sébör, Sopron.

Seitdem Snellius noch im 17. Jahrhundert das Problem des unzugänglichen Abstandes aufgestellt hat, befaßten sich sehr Viele mit dessen Lösung. Die Geschichte dieser Bestrebungen sowie die verschiedenen Lösungsformen sind in dem hervorragenden Werke Hammers, Trigonometrie, 1923, beschrieben (siehe Seite 321—325 und 356—357). Eingehend beschäftigt sich damit auch Jordan in seinem Handbuch der Vermessungskunde, II. Band 1914 (siehe Seite 390—396) und gibt auch mehrere Lösungsmethoden an; erwähnt sei noch Bohn (Die Landmessung, 1886, Seite 353—371), dann außer den obgenannten Werken wird sozusagen in jedem Geodäsiebuche ein mehr oder minder weiter Raum diesem Problem eingeräumt.

Zweck dieser Abhandlung ist, zu erforschen, ob es möglich sei, irgendwelche neueren Zusammenhänge zwischen den gegebenen und gesuchten Winkeln auf vektoranalytischem Wege aufzufinden.

Es sei bemerkt, daß in den folgenden vektoranalytischen Rechnungen überall die Bezeichnungen R. Schumanns angewendet werden.



Laut der beistehenden Figur können wir eine jede Richtung als Vektor auffassen und können demgemäß vom Dreieck 2, 4, 3 aufstellen, daß $\mathbf{d} = \mathbf{q} - \mathbf{u}$. Nachdem wir an der rechten Seite die einzelnen Vektoren als das Produkt der Multiplikation des absoluten Wertes und des Einheitsvektors auffassen können, wird

$$\mathfrak{d} = q \cdot \mathfrak{q}_0 - n \cdot \mathfrak{n}_0$$

Wenn wir nun die Skalarwerte q und n von den Dreiecken 1, 2, 4 und 1, 2, 3 ableiten, so erhalten wir:

$$a - p = -q \quad \text{und} \quad a - m = -n$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung vektoriell mit p und die zweite mit m , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} [p \alpha] &= [q \beta] & [m \alpha] &= [n \beta] \\ p \cdot a \cdot [p_0 \alpha_0] &= p \cdot q \cdot [q_0 \beta_0] & m \cdot a \cdot [m_0 \alpha_0] &= m \cdot n \cdot [n_0 \beta_0] \\ q = \frac{a \cdot \sin(p \alpha)}{\sin(q \beta)} &\dots 1) & n = \frac{a \cdot \sin(m \alpha)}{\sin(n \beta)} &\dots 2) \end{aligned}$$

Wie ersichtlich, ist das nichts anderes, als der Sinussatz.

Der δ -Vektor wird daher sein:

$$\delta = \frac{a \cdot \sin(p \alpha)}{\sin(q \beta)} \cdot q_0 - \frac{a \cdot \sin(m \alpha)}{\sin(n \beta)} \cdot n_0$$

Berechnen wir nun mittels dieser Formel, indem wir die Gleichung zum Quadrat erheben, den absoluten Wert von δ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{a^2 \cdot \sin^2(p \alpha)}{\sin^2(q \beta)} + \frac{a^2 \cdot \sin^2(m \alpha)}{\sin^2(n \beta)} - 2 \frac{a^2 \cdot \sin(p \alpha) \cdot \sin(m \alpha)}{\sin(q \beta) \cdot \sin(n \beta)} \cdot (q_0 n_0) = \\ &= \frac{a^2 \cdot \sin^2(p \alpha)}{\sin^2(q \beta)} + \frac{a^2 \cdot \sin^2(m \alpha)}{\sin^2(n \beta)} - 2 \frac{a^2 \cdot \sin(p \alpha) \cdot \sin(m \alpha)}{\sin(q \beta) \cdot \sin(n \beta)} \cdot \cos(q n) \end{aligned}$$

Was nichts anderes als den Cosinus-Lehrsatz bedeutet. Daraus kann nun das a errechnet werden:

$$a = \frac{d \cdot \sin(q \beta) \cdot \sin(n \beta)}{\sqrt{\sin^2(p \alpha) \cdot \sin^2(n \beta) + \sin^2(q \beta) \cdot \sin^2(m \alpha) - 2 \sin(p \alpha) \cdot \sin(m \alpha) \cdot \sin(q \beta) \cdot \sin(n \beta) \cdot \cos(q n)}}$$

Dieselbe Formel können wir in Hammers Trigonometrie (Seite 324) auffinden.

Mit Hilfe dieser Formel ist nun der absolute Wert eines jeden beliebigen Vektors abzuleiten. Zwecks einfacherer Schreibart setzen wir

$$\sqrt{\sin^2(p \alpha) \cdot \sin^2(n \beta) + \sin^2(q \beta) \cdot \sin^2(m \alpha) - 2 \cdot \sin(p \alpha) \cdot \sin(m \alpha) \cdot \sin(q \beta) \cdot \sin(n \beta) \cdot \cos(q n)} = k \cdot 3)$$

Dann ist $a = \frac{d}{k} \cdot \sin(q \beta) \cdot \sin(n \beta) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \text{I)}$

Wenn wir nun den Wert von a in die Gleichungen 1) und 2) substituieren, so wird:

$$q = \frac{d}{k} \cdot \sin(n \beta) \cdot \sin(p \alpha) \dots \dots \dots \dots \quad \text{II})$$

$$n = \frac{d}{k} \cdot \sin(q \beta) \cdot \sin(m \alpha) \dots \dots \dots \dots \quad \text{III})$$

Ebenso können wir die Entfernung m und p aus den Dreiecken 1, 2, 3 und 1, 2, 4 ermitteln:

$\alpha + \beta = \gamma$ vektoriell multipliziert mit n ergibt sich:

$$m = \frac{a \cdot \sin(n \gamma)}{\sin(n \beta)} \text{ also wird}$$

$$m = \frac{d}{k} \cdot \sin(q \beta) \cdot \sin(n \gamma) \dots \dots \dots \dots \quad \text{IV})$$

$\alpha + \beta = \gamma$ multiplizieren wir ebenfalls vektoriell mit q

$$p = \frac{a \cdot \sin(q \gamma)}{\sin(q \beta)} \text{ so wird}$$

$$p = \frac{d}{k} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad \dots \quad \text{V}$$

Wir können nun sehr leicht die zwischen den einzelnen Seiten eingeschlossenen Winkel ermitteln: aus dem Viereck 1, 2, 3, 4 folgt die Vektorgleichung:

$$\alpha + \gamma - \beta = \delta \quad \dots \quad \text{4)$$

Multiplizieren wir dieselbe mit α vektoriell, so wird:

$$[\alpha \gamma] - [\alpha \beta] = [\alpha \delta]$$

Diese Formel kann nun auch in dieser Gestalt aufgestellt werden:

$$a \cdot q \cdot [a_0 q_0] - a \cdot m \cdot [a_0 m_0] = a \cdot d \cdot [a_0 d_0]$$

Wenn wir nun die Werte von q und m , aus den Gleichungen II) und IV) einsetzen und die nötigen Kürzungen vollziehen, so erhalten wir den $\sin(\alpha \delta)$:

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha \gamma) + \frac{1}{k} \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) = \sin(\alpha \delta) \quad \text{5)}$$

Durch die skalare Multiplikation mit α der Gleichung 4) ergibt sich:

$$(\alpha \alpha) + (\alpha \gamma) - (\alpha \beta) = (\alpha \delta)$$

Nach Einsetzung der Werte q und m aus den Gleichungen II) und IV) erhalten wir nach Kürzung, $\cos(\alpha \delta)$:

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha \gamma) + \frac{1}{k} \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha \beta) + \frac{1}{k} \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha \gamma) = \cos(\alpha \delta) \quad \text{6)}$$

Indem wir die Gleichung 5) durch die Gleichung 6) dividieren und die Kürzung vollziehen, erhalten wir $\tan(\alpha \delta)$; durch diese Operation kann nun der Winkel ($\alpha \delta$) aus den gegebenen Winkeln eindeutig errechnet werden:

$$\frac{\sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha \gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha \beta)}{\sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha \gamma) + \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha \beta) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha \gamma)} = \tan(\alpha \delta) \quad \text{VI)}$$

Ebenso können wir auch den Winkel ($\gamma \delta$) errechnen, wenn wir die Gleichung 4) zuerst vektoriell und dann skalar mit γ multiplizieren, die Werte a und q aus den Gleichungen I) und II) einsetzen und die nötigen Kürzungen vollziehen:

$$[\gamma \alpha] - [\gamma \beta] = [\gamma \delta]$$

$$(\gamma \alpha) + (\gamma \beta) - (\gamma \beta) = (\gamma \delta)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) + \frac{1}{k} \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) = \sin(\gamma \delta) \quad \text{7)}$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) + \frac{1}{k} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) + \frac{1}{k} \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha \beta) = \cos(\gamma \delta) \quad \text{8)}$$

Der Quotient der Gleichungen 7) und 8) ergibt den Wert $\tan(\gamma \delta)$:

$$\frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha \beta)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha \beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha \beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha \beta)} = \tan(\gamma \delta) \quad \text{VII)}$$

Wenn wir die Gleichung 4) zuerst vektoriell und dann skalar mit m multiplizieren, die Substitutionen vollführen und diese zwei Gleichungen 9) und 10) durch einander dividieren, erhalten wir $\operatorname{tg}(m\delta)$:

$$m \cdot a \cdot [m_0 a_0] + m \cdot q \cdot [m_0 q_0] = m d [m_0 \delta_0]$$

$$m \cdot a \cdot (\mathbb{C} m_0 a_0) + m \cdot q \cdot (\mathbb{C} m_0 q_0) - m \cdot m \cdot (\mathbb{C} m_0 m_0) = m d (\mathbb{C} m_0 \delta_0)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(qp) \cdot \sin(nm) \cdot \sin(ma) + \frac{1}{k} \cdot \sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \sin(mp) = \sin(m\delta) \quad . \quad 9)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(qp) \cdot \sin(nm) \cdot \cos(ma) + \frac{1}{k} \cdot \sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \cos(mp) + \frac{1}{k} \cdot \sin(qp) \cdot \sin(an) = \cos(m\delta) \quad 10)$$

$$\frac{\sin(qp) \cdot \sin(nm) \cdot \sin(ma) + \sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \sin(mp)}{\sin(qp) \cdot \sin(nm) \cdot \cos(ma) + \sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \cos(mp) + \sin(qp) \cdot \sin(an)} = \operatorname{tg}(m\delta) \quad . \quad \text{VIII}$$

Zur Ermittlung des Winkels ($n\delta$) gibt das Dreieck 3, 2, 4 die Gleichung:

$$q - n = \delta \quad . \quad 11)$$

Multiplizieren wir vektoriell, dann skalar mit n und dividieren wir nach den Substitutionen und Kürzungen die zwei Gleichungen 12) und 13) miteinander, so erhalten wir wie folgt $\operatorname{tg}(n\delta)$:

$$[nq] = [nd]$$

$$(\mathbb{C} nq) - (\mathbb{C} nn) = (\mathbb{C} nd)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \sin(nq) = \sin(n\delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(pq) \cdot \sin(ma) + \frac{1}{k} \cdot \sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \cos(nq) = \cos(n\delta) \quad . \quad 13)$$

$$\frac{\sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \sin(nq)}{\sin(pq) \cdot \sin(ma) + \sin(nm) \cdot \sin(pa) \cdot \cos(nq)} = \operatorname{tg}(n\delta) \quad . \quad \text{IX}$$

Aus der Gleichung 11) kann man auch noch den Winkel (qd) errechnen, was zur Kontrolle der Gleichung VII) dienen kann. Multiplizieren wir also die Gleichung 11) vektoriell, dann skalar mit q , so erhalten wir nach dem vorerst beschriebenen Verfahren $\operatorname{tg}(qd)$:

$$- [qn] = [qd]$$

$$(\mathbb{C} qq) - (\mathbb{C} qn) = (\mathbb{C} qd)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(pq) \cdot \sin(ma) \cdot \sin(qn) = \sin(q\delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(pq) \cdot \sin(ma) \cdot \cos(qn) + \frac{1}{k} \cdot \sin(nm) \cdot \sin(pa) = \cos(q\delta) \quad . \quad 15)$$

$$\frac{\sin(pq) \cdot \sin(ma) \cdot \sin(qn)}{\sin(pq) \cdot \sin(ma) \cdot \cos(qn) + \sin(nm) \cdot \sin(pa)} = \operatorname{tg}(q\delta) \quad . \quad \text{X}$$

Wir können den Winkel (md) ebenfalls kontrollieren, wenn wir vom Dreieck 1, 4, 3 die Formel aufstellen:

$$p - m = \delta \quad . \quad 16)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung vektoriell, dann skalar mit m , so erhalten wir nach obigem Verfahren $\operatorname{tg}(m \delta)$:

$$[m p] = [m \delta]$$

$$\mathbb{C} m p \mathbb{D} - \mathbb{C} m m \mathbb{D} = \mathbb{C} m \delta \mathbb{D}$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(q \alpha) \cdot \sin(n m) \cdot \sin(m p) = \sin(m \delta) \dots \dots \dots \quad 17)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(q \alpha) \cdot \sin(n m) \cdot \cos(m p) + \frac{1}{k} \cdot \sin(p q) \cdot \sin(n \alpha) = \cos(m \delta) \dots \dots \dots \quad 18)$$

$$\frac{\sin(q \alpha) \cdot \sin(n m) \cdot \sin(m p)}{\sin(q \alpha) \cdot \sin(n m) \cdot \cos(m p) + \sin(p q) \cdot \sin(n \alpha)} = \operatorname{tg}(m \delta) \dots \text{XI}$$

Schließlich kann der Winkel $(p \delta)$ aus der Gleichung 16) errechnet werden, wenn wir dieselbe vektoriell, dann skalar mit p multiplizieren und dann, wie vorher, verfahren:

$$- [p m] = [p \delta]$$

$$\mathbb{C} p p \mathbb{D} - \mathbb{C} p m \mathbb{D} = \mathbb{C} p \delta \mathbb{D}$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(p q) \cdot \sin(n \alpha) \cdot \sin(p m) = \sin(p \delta) \dots \dots \dots \quad 19)$$

$$\frac{1}{k} \cdot \sin(q \alpha) \cdot \sin(n m) + \frac{1}{k} \cdot \sin(p q) \cdot \sin(n \alpha) \cdot \cos(p m) = \cos(p \delta) \dots \dots \dots \quad 20)$$

$$\frac{\sin(p q) \cdot \sin(n \alpha) \cdot \sin(p m)}{\sin(q \alpha) \cdot \sin(n m) + \sin(p q) \cdot \sin(n \alpha) \cdot \cos(p m)} = \operatorname{tg}(p \delta) \dots \text{XII}$$

Aus alldem können wir sehen, daß zwischen den gemessenen und gesuchten Winkeln ganz neue Zusammenhänge aufzustellen sind, mit deren Hilfe die zwischen zwei beliebigen Seiten eingeschlossenen Winkel unmittelbar und voneinander unabhängig errechnet werden können.

Dies alles liefert auch einen Beweis dafür, daß wir mittels der vektoriellen Methode zu ganz neuen Zusammenhängen gelangen können und daß die Anwendung dieses rechnerischen Verfahrens in der Geodäsie als überaus zweckmäßig beurteilt werden kann.

N u m e r i s c h e s B e i s p i e l:

Gegebene Seite: $d = 555.09 \text{ m}$

Gemessene Winkel: $\beta = 78^\circ 12' 22''$

$\beta_1 = 18^\circ 25' 55''$

$\gamma = 32^\circ 14' 38''$

$\gamma_1 = 69^\circ 13' 19''$

Gesucht: Seite a, q, n, m, p . Winkel $\alpha_1, \alpha, \delta_1, \delta, (\alpha \delta)$.

Lösung im Anschlusse an die gegebenen Entwicklungen.

Winkelstafel

(Winkel zwischen den Vektoren; aus den gemessenen Winkeln gebildet).

Winkel	log sin	log cos	log sin ²
(p a) = 18° 25' 55"	9.499932 - 10p		8.999864 - 10
(m n) = 290° 27' 00"	9.971729 - 10n		9.943458 - 10
(p q) = 267° 39' 14"	9.999636 - 10n		9.999272 - 10
(m a) = 78° 12' 22"	9.990734 - 10p	9.310463 - 10p	9.981468 - 10
(q n) = 323° 01' 19"	9.779243 - 10n	9.902509 - 10p	
(a n) = 212° 14' 38"	9.727154 - 10n		
(a q) = 249° 13' 19"	9.970794 - 10n	9.549921 - 10n	
(m p) = 59° 46' 27"	9.936538 - 10p	9.701922 - 10p	

Berechnung des Faktors k nach Gleichung 3):

$$\begin{aligned}
 \log [\sin^2(p a) \cdot \sin^2(m n)] &= 8.943322 - 10p \\
 \log [\sin^2(q p) \cdot \sin^2(m a)] &= 9.980740 - 10p \\
 \log [\sin(p a) \cdot \sin(m a) \cdot \sin(q p) \cdot \sin(n m) \cdot \cos(q n)] &= 9.364540 - 10p \\
 \sin^2(p a) \cdot \sin^2(m n) &= 0.087765 \\
 \sin^2(p q) \cdot \sin^2(m a) &= 0.956622 \\
 &\hline
 &&& 1.044387 \\
 - 2 \cdot \sin(p a) \cdot \sin(m a) \cdot \sin(q p) \cdot \sin(n m) \cdot \cos(q n) &= - 0.462990 \\
 k^2 &= 0.581397 \\
 \log k &= 0.882236 - 1
 \end{aligned}$$

Berechnung der Seite a nach Formel I.

$$\begin{aligned}
 \log d &= 2.744363 \\
 \log \frac{d}{k} &= 2.862127 \\
 \log [\sin(n m) \cdot \sin(q p)] &= 0.971365 - 1 \\
 \log a &= 2.833492 \\
 &\hline
 &&& a = 681.54 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Seite q nach Formel II.

$$\begin{aligned}
 \log \frac{d}{k} &= 2.862127 \\
 \log [\sin(n m) \cdot \sin(p a)] &= 0.471661 - 1 \\
 \log q &= 2.333788 \\
 &\hline
 &&& q = 215.67 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Seite n nach Formel III.

$$\begin{aligned}
 \log \frac{d}{k} &= 2.862127 \\
 \log [\sin(q p) \cdot \sin(m a)] &= 0.990370 - 1 \\
 \log n &= 2.852497 \\
 &\hline
 &&& n = 712.03 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Seite m nach Formel IV.

$$\begin{aligned}
 \log \frac{d}{k} &= 2.862127 \\
 \log [\sin(q p) \cdot \sin(a n)] &= 0.726790 - 1 \\
 \log m &= 2.588917 \\
 &\hline
 &&& m = 388.07 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Seite p nach Formel V.

$$\begin{array}{rcl} \log \frac{d}{k} = 2.862127 \\ \log [\sin(q\alpha) \cdot \sin(m\eta)] = 0.942523 - 1 \\ \hline \log p = 2.804650 & & p = 637.75 \text{ m} \end{array}$$

Bestimmung der Winkel $(n\delta)$ und damit α_1 nach Formel IX.

$$\begin{array}{rcl} \log [\sin(p\eta) \cdot \sin(m\alpha)] = 0.990370 - 1n & & \sin(p\eta) \cdot \sin(m\alpha) = -0.978070 \\ \log [\sin(nm) \cdot \sin(p\alpha) \cdot \cos(nq)] = 0.374170 - 1p & & \sin(nm) \cdot \sin(p\alpha) \cdot \cos(nq) = +0.236684 \\ \hline \text{Nenner} = -0.741386 & & \\ \log [\sin(nm) \cdot \sin(p\alpha) \cdot \cos(nq)] = 0.250904 - 1p & & 180^\circ 00' 00'' \\ \log \text{Nenner} = 0.870045 - 1n & & - 13^\circ 30' 54'' \\ \log \operatorname{tg}(n\delta) = 0.380859 - 1n & & (n\delta) = 166^\circ 29' 06'' \\ \hline \alpha_1 = 13^\circ 30' 54'' & & \end{array}$$

Bestimmung der Winkel $(q\delta)$ und damit δ , nach Formel X.

$$\begin{array}{rcl} \log [\sin(p\eta) \cdot \sin(m\alpha) \cdot \cos(qn)] = 0.892879 - 1n & & \sin(p\eta) \cdot \sin(m\alpha) \cdot \cos(qn) = -0.781382 \\ \log [\sin(nm) \cdot \sin(p\alpha)] = 0.471661 - 1p & & \sin(nm) \cdot \sin(p\alpha) = +0.296280 \\ \hline \text{Nenner} = -0.485102 & & \\ \log [\sin(p\eta) \cdot \sin(m\alpha) \cdot \sin(qn)] = 0.769613 - 1p & & 180^\circ 00' 00'' \\ \log \text{Nenner} = 0.685833 - 1n & & - 50^\circ 29' 33'' \\ \log \operatorname{tg}(q\delta) = 0.083780 - n & & (q\delta) = \delta = 129^\circ 30' 27'' \\ \hline & & \end{array}$$

Bestimmung der Winkel $(m\delta)$ und damit α , nach Formel XI.

$$\begin{array}{rcl} \log [\sin(q\alpha) \cdot \sin(nm) \cdot \cos(mp)] = 0.644445 - 1p & & \sin(q\alpha) \cdot \sin(nm) \cdot \cos(mp) = +0.441006 \\ \log [\sin(p\eta) \cdot \sin(n\alpha)] = 0.726790 - 1n & & \sin(p\eta) \cdot \sin(n\alpha) = -0.533077 \\ \hline \text{Nenner} = -0.092071 & & \\ \log [\sin(q\alpha) \cdot \sin(nm) \cdot \sin(mp)] = 0.879061 - 1p & & 180^\circ 00' 00'' \\ \log \text{Nenner} = 0.964151 - 2n & & - 83^\circ 03' 52'' \\ \log \operatorname{tg}(m\delta) = 0.914910 - n & & (m\delta) = 96^\circ 56' 08'' \\ \hline \alpha = 83^\circ 03' 52'' & & \end{array}$$

Bestimmung der Winkel ($p \delta$) und damit $\hat{\alpha}_1$, nach Formel XII.

$$\log [\sin(p q) \cdot \sin(n a) \cdot \cos(p m)] = 0.428712 - 1n$$

$$\sin(p q) \cdot \sin(n a) \cdot \cos(p m) = -0.268356$$

$$\log [\sin(q a) \cdot \sin(n m)] = 0.942523 - 1p$$

$$\sin(q a) \cdot \sin(n m) = +0.876038$$

$$\text{Nenner} = +0.607682$$

$$\log [\sin(p q) \cdot \sin(n a) \cdot \sin(p m)] = 0.663328 - 1p$$

$$\log \text{Nenner} = 0.783676 - 1p$$

$$\log \operatorname{tg}(p \delta) = 0.879652 - 1p$$

$$(p \delta) = \hat{\alpha}_1 = 37^{\circ} 09' 40''$$

Bestimmung der Winkel ($a \delta$) nach Formel VI.

$$\log [\sin(q p) \cdot \sin(n m)] = 0.971365 - 1p$$

$$\sin(q p) \cdot \sin(n m) = +0.936192$$

$$\log [\sin(n m) \cdot \sin(p a) \cdot \cos(a q)] = 0.021582 - 1n$$

$$\sin(n m) \cdot \sin(p a) \cdot \cos(a q) = -0.105095$$

$$\log [\sin(q p) \cdot \sin(a n) \cdot \cos(a m)] = 0.037253 - 1n$$

$$\sin(q p) \cdot \sin(a n) \cdot \cos(a m) = -0.108957$$

$$\text{Nenner} = +0.722140$$

$$\log [\sin(n m) \cdot \sin(p a) \cdot \sin(a q)] = 0.442455 - 1n$$

$$\sin(n m) \cdot \sin(p a) \cdot \sin(a q) = -0.276984$$

$$\log [\sin(q p) \cdot \sin(a n) \cdot \sin(a m)] = 0.717524 - 1p$$

$$\sin(q p) \cdot \sin(a n) \cdot \sin(a m) = +0.521824$$

$$\text{Zähler} = +0.244840$$

$$\log \text{Zähler} = 0.388882 - 1p$$

$$\log \text{Nenner} = 0.858621 - 1p$$

$$\log \operatorname{tg}(a \delta) = 0.530261 - 1p \quad (a \delta) \cancel{\neq} = 18^{\circ} 43' 45''$$

Kontrolle:

$$\beta_1 + \gamma = \alpha_1 + \hat{\alpha}_1$$

$$\alpha - \alpha_1 = 180^{\circ} - (\beta + \gamma)$$

$$\delta - \hat{\alpha}_1 = 180^{\circ} - (\beta_1 + \gamma_1)$$

$$\beta_1 + \gamma = 50^{\circ} 40' 33''$$

$$\alpha - \alpha_1 = 69^{\circ} 32' 58''$$

$$\delta - \hat{\alpha}_1 = 92^{\circ} 20' 47''$$

$$\alpha_1 + \hat{\alpha}_1 = 50^{\circ} 40' 34''$$

$$180^{\circ} - (\beta + \gamma) = 69^{\circ} 33' 00''$$

$$180 - (\beta_1 + \gamma_1) = 92^{\circ} 20' 46''$$

$$\alpha + \delta + \beta + \gamma_1 = 360^{\circ}$$

$$\alpha = 83^{\circ} 03' 52''$$

$$\delta = 129^{\circ} 30' 27''$$

$$\beta = 78^{\circ} 12' 22''$$

$$\gamma_1 = 69^{\circ} 13' 19''$$

$$360^{\circ} 00' 00''$$

Der technische Grundgedanke photogrammetrischer Seilaufnahmen.

Von Sektionsrat Ing. Dr. techn. F. Skrobanek, Wien.

Bei jedem Objekt, sei es von Natur aus da oder von Menschenhand geschaffen, bietet das Lichtbild stets eine Reihe wichtiger Anhaltspunkte zur Beurteilung des betreffenden Gegenstandes, insbesonders aber dann, wenn es sich vor allem um die genauen Abmessungen handelt, welche mittels der modernen photogrammetrischen Methoden in hervorragender Schärfe und dabei — im Gegensatz zu anderen Meßverfahren — weitaus rascher und mit relativ geringerem Kostenaufwand gewonnen werden können.

Unter den technisch wichtigen Objekten ragen in bezug auf leichte Erfassbarkeit durch das Lichtbild die weitgespannten Drähte und Drahtseile, welche die Hauptkonstruktionselemente der heute so aktuellen Seilschwebebahnen, Seilfähren, elektrischen Fernleitungen usw. bilden, ganz besonders hervor. Sehen wir nämlich von der bisher noch wenig geklärten inneren Kräfteverteilung in geflochtenen Drahtseilen ab, fassen nur die das Seil durchlaufende, nach außen hin allein maßgebende Mittelkraft ins Auge und betrachten dabei das Seil nicht als ruhenden, rein baustatisch zu berechnenden Träger, sondern als beweglichen und stark deformierbaren Triebwerksteil, also als Maschinenelement, dann liefert das photogrammetrische Bild auch stets mit praktisch weitaus genügender Schärfe und Sicherheit das Kräftespiel im Seil oder Drahtkabel. Das im Lichtbild festgehaltene Seil an sich ist also stets zugleich sein eigener Kraftmesser und es ist gar nicht notwendig, ja sogar weitaus ungenauer, die in einem Seil oder Seilsystem augenblicklich herrschenden Kräfte etwa mittels eines meist nur auf recht umständliche und betriebsstörende Art einzubauenden Dynamometers zu messen. Man photographiert also einfach das zu untersuchende Seil, bzw. Seilsystem, um die gewünschten technischen Daten rasch und sicher zu gewinnen.

Diese schon aus den Anfangsgründen des Mechanikunterrichtes leicht zu schöpfende, aber merkwürdigerweise bisher unbeachtet gebliebene einfache Erkenntnis nutzend, hat Verfasser beim Österreichischen Bundesministerium für Handel und Verkehr anlässlich der Errichtung neuer Donau-Seilfähren die photogrammetrische Aufnahme der größten Donauseilfähre bei Marbach in Niederösterreich angeregt, um das interessante und ziemlich verwickelte Kräftespiel solcher wichtiger Verkehrsobjekte in einwandfreier und dem heutigen Stande der Ingenieurmechanik entsprechender Weise zu klären. Diese Aufnahmen wurden im Mai 1927 vom Österr. Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen unter der Leitung des Obervermessungsrates Major a. D. Maximilian Schöber durchgeführt und haben nicht bloß die technischen Grundlagen für die im unten angeführten Aufsatz¹⁾ auszugsweise skizzierte neue Berechnungs-

¹⁾ Dr. Franz Skrobanek: II. „Berechnung von Seilfähren“, „Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereines“, Jahrgang 1928, Heft 1/2.

weise geliefert, sondern zeigten zugleich den Weg für die rasche und genaue Untersuchung des Kräftespieles der besonders in Österreich schon zu hoher Entwicklung gelangten Seilschwebebahn.

Dank der weiteren Förderung des bei den Seilfahrenaufnahmen sich als nützlich erwiesenen Vorganges durch die Herren Ministerialrat Ing. Benno S i m m e r t im Bundesministerium für Handel und Verkehr (Verkehrssektion), Landesrat Dr. Matthias Zeinitzer von der Kärntner Landesregierung und Prof. Dr. Wilhelm E f f e n b e r g e r von der Montanistischen Hochschule in Leoben konnte im Juni 1930 erstmalig auch eine der modernsten Personen-Seilschwebebahn, und zwar die Seilbahn Annenheim—Kanzelhöhe bei Villach in Kärnten photogrammetrisch aufgenommen werden. Die ebenfalls unter der Leitung Major Schobers ohne jegliche Betriebsstörung der stark frequentierten Seilbahn durchgeführte Aufnahme hat ein technisch äußerst wertvolles und reichhaltiges Material geliefert, durch dessen bisherige Teilbearbeitung bereits die volle Richtigkeit und der praktische Nutzen der in den unten genannten Arbeiten skizzierten neuen kinematischen Berechnungsmethoden²⁾ bewiesen wird.

Das Wesentlichste herausgreifend, ist auf Grund der Aufnahmen festzustellen:

- I. Bei weitgespannten Seilen ist der für kurze Seilstücke beträchtlich erscheinende Einfluß der Biegungssteife³⁾ selbst im Rahmen der scharfen photogrammetrischen Meßmethoden nicht bemerkbar.
- II. Die Seile sind ihren Durchhangskurven nach als vollkommen gelenkige, jedoch elastisch dehbare Kettenlinien anzusehen.
- III. Das Kräftespiel in Seilen und Seilsystemen ist in mechanisch einwandfreier und auch für genaue Dimensionierungen ausreichender Weise nicht mittels rein baustatischer, sondern nur mittels kinematischer Methoden zu erfassen.
- IV. Bei Seilkonstruktionen mit konstanten Spanngewichten ist die Berücksichtigung der elastischen Dehnungen nicht immer erforderlich (Seil-

²⁾ Dr. Franz Skrobanek: III. „Die Tragseilkurve der Seilschwebebahn“, „Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereines“, Jahrgang 1930, Heft 17/18 und 19/20; IV. „Eine neue einfache Berechnungsart für Seilschwebebahn“, „Die Wasserwirtschaft“, Jahrgang 1930, Heft 27 (Seilbahnnummer); V. „Die Zugseilkurve der Seilschwebebahn“, „Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereines“, Jahrgang 1930, Heft 43/44 und 45/46; VI. „Ingenieurmäßige Erläuterung der Hyperbelfunktionen“, „Die Wasserwirtschaft“, Jahrgang 1930, Heft 32 und 33; VII. „Das gesamte Kräftespiel einer Seilschwebebahn“, „Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereines“, Jahrgang 1931, Heft 5/6; VIII. „Berechnung von Kabelkranen“, „Die Wasserwirtschaft“, Jahrgang 1931, Heft 15/16 (Seilbahnnummer); IX. „Kettenlinie durch drei Punkte“, „Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereines“, Jahrgang 1931, Heft 41/42; X. „Einige weitere Gedanken zur ingenieurmäßigen Berechnung und Überprüfung von Seilschwebebahn“, „Die Wasserwirtschaft“, Jahrgang 1931, Heft 28/29 (Seilbahnnummer).

³⁾ Dr. Franz Skrobanek: XI. „Drei wichtige Grundgedanken zur praktischen Seilberechnung“, „Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereines“, Jahrgang 1932, Heft 5/6.

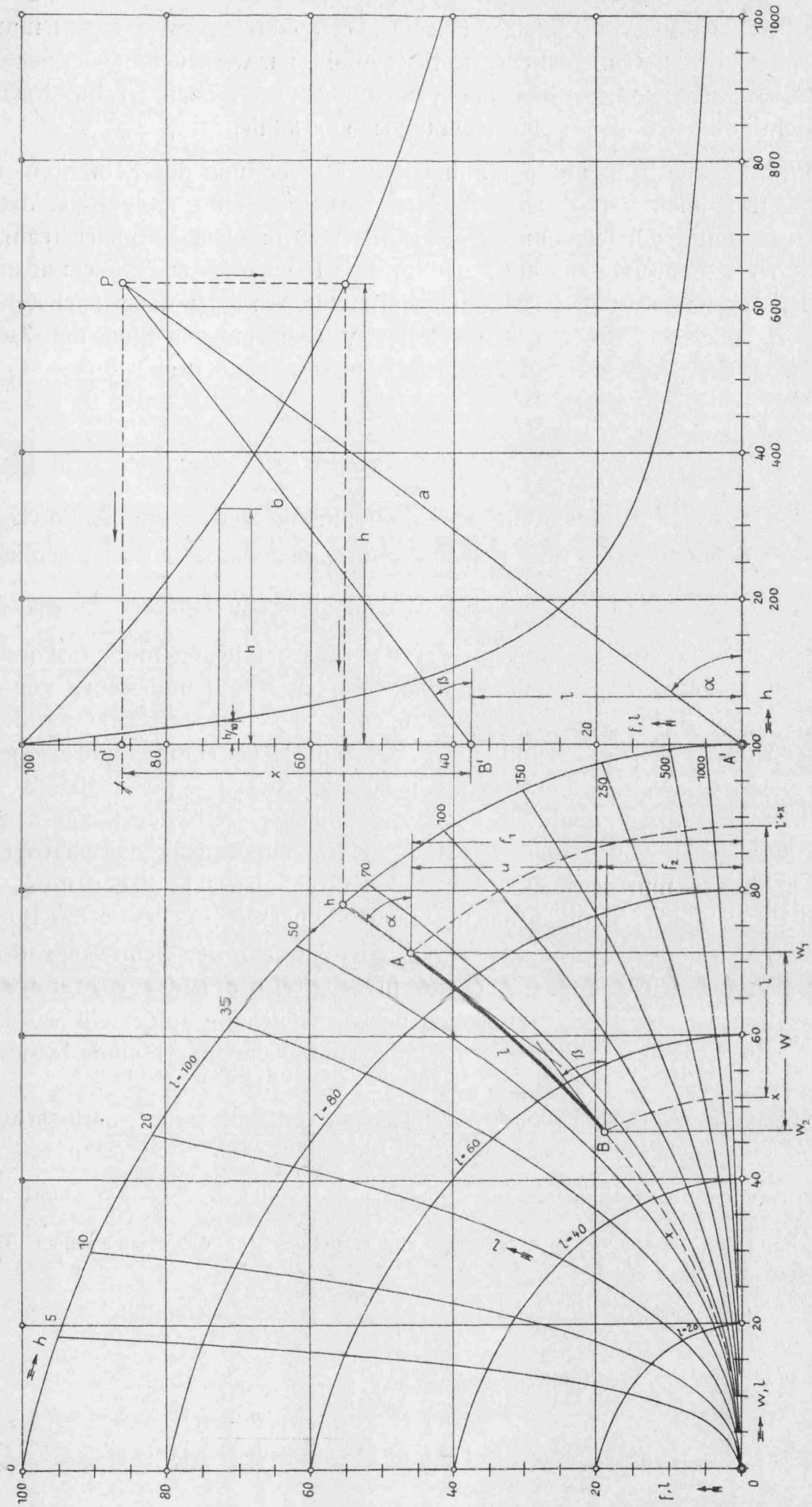


Abb. 1.

schwebebahnen); sie spielt aber bei festverankerten, bzw. festgeklemmten Seilen eine ausschlaggebende Rolle (Seilfähren usw.); auch bei der genauen Behandlung von Schwingungerscheinungen an Seilen ist die Berücksichtigung der elastischen Dehnungen unerlässlich⁴⁾.

Während die rein photogrammetrische Bearbeitung der Seilfähren- und Seilbahnaufnahmen bereits abgeschlossen vorliegt, ist die endgültige, druckreife Ausfertigung der sehr umfangreichen ingenieurmäßigen Vergleichsrechnungen in der gegenwärtigen, auch den praktisch wichtigsten Forschungen so abholden Zeit leider nicht in Bälde zu erhoffen und es mögen daher nachstehend bloß zwei Hauptgedanken flüchtig skizziert werden, um den Sinn, den Zweck und praktischen Wert der einschlägigen Arbeiten anzudeuten.

A. Technische Verwertung eines photogrammetrisch gewonnenen Seilbildes.

Das aus der Bildmessung koordinatenmäßig gewonnene Abbild eines beliebigen Seilbogens \widehat{AB} muß sich in die in Abb. 1 dargestellte Kettenlinienschar $(w = h \cdot \operatorname{ar} \sin \frac{l}{h}, f = \sqrt{h^2 + l^2} - h)$ eindeutig einfügen lassen. Um nun den Ort, wo das Seilstück in der Kurvenschar liegen muß, raschestens zu finden, tragen wir die Seillänge l von A' nach B' auf und ziehen von den Punkten A' und B' die zu den Endtangentialen des Kurvenstückes parallelen Strahlen a und b , welche sich im Punkt P , d. i. dem Pol des zum Seilbild gehörigen Krafteckes schneiden und auf der h -Kurve (Hyperbel: $f = \sqrt{h^2 + 10.000} - h$) sowohl den Parameter h wie auf der Ordinatenachse die blinde Länge x jener Kettenlinie — also auch diese selbst — liefern, auf welcher das photogrammetrisch aufgenommene Seilstück in der Kettenlinienschar liegen muß. Auf diesem Kurvenindividuum ist nun mittels der Längen $l + x$, bzw. x das Bogenstück \widehat{AB} zwischen den (mit den orthogonalen Trajektorien keineswegs identischen) Kurven gleicher Bogenlänge l vom Scheitel 0 aufzutragen, für welche von Ing. Levasseur die unten angegebene Gleichung aufgestellt wurde⁵⁾, wodurch die Lage des Seilbogenstückes innerhalb seiner Kettenlinie festgelegt

⁴⁾ Prof. Dr. Karl Wolf, Wien: „Schwingungen elastischer Seile“, „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, Band 7, Jahrgang 1927, S. 137–144.

⁵⁾ Aus der Kettenlinienschar $f = h \cdot (\operatorname{co} \frac{w}{h} - 1)$ folgt $h = \frac{l^2 - f^2}{2 \cdot f}$, womit man nach Elimination von h bei konstantem l zur Gleichung für die Schar der Trajektorien

$$w = \frac{(l + f) \cdot (l - f)}{2 \cdot f} \cdot \operatorname{lognat} \frac{l + f}{l - f} \dots (l = \text{konstant})$$

gelangt und wozu die Ableitung

$$\frac{dw}{df} = \frac{l}{f} - \operatorname{lognat} \frac{l + f}{l - f} \cdot \left[1 + \frac{(l + f) \cdot (l - f)}{2 \cdot f^2} \right]$$

gehört.

erscheint. Der tatsächlich auftretende Horizontalzug H ist ebenso wie die anderen wirklichen Seilkräfte aus dem geometrischen Bild durch Multiplikation des entnommenen Wertes h mit dem Faktor p (Metergewicht des Seiles) zu gewinnen, also: $H = p \cdot h$ usw.

B. Ermittlung des Elastizitätsmoduls von Seilen auf photogrammetrischem Wege.

Streng genommen hängen alle Seile nicht nach gemeinen Kettenlinien (Abb. 2: $f = h \cdot \cos \frac{w}{h} - h$), sondern nach elastischen Kettenlinien durch, weshalb es als sehr wünschenswert scheinen muß, daß der bisher auch für praktische Zwecke keineswegs genügend scharf erhobene Elastizitätsmodul E von Drahtseilen in absehbarer Zeit einwandfrei bestimmt werden möge. Da der Laboratoriumsversuch im Kleinen in diesem Falle vollends versagt und auch der sehr naheliegende Vorgang, daß man ein schweres Drahtseil einfach in einen tiefen Bergwerksschacht hinunterhängt und dort mit verschiedenen Riesengewichten (40—50 t) belastet, praktisch äußerst umständlich und kostspielig wäre, muß die photogrammetrische Methode auch hier als bester Weg erscheinen.

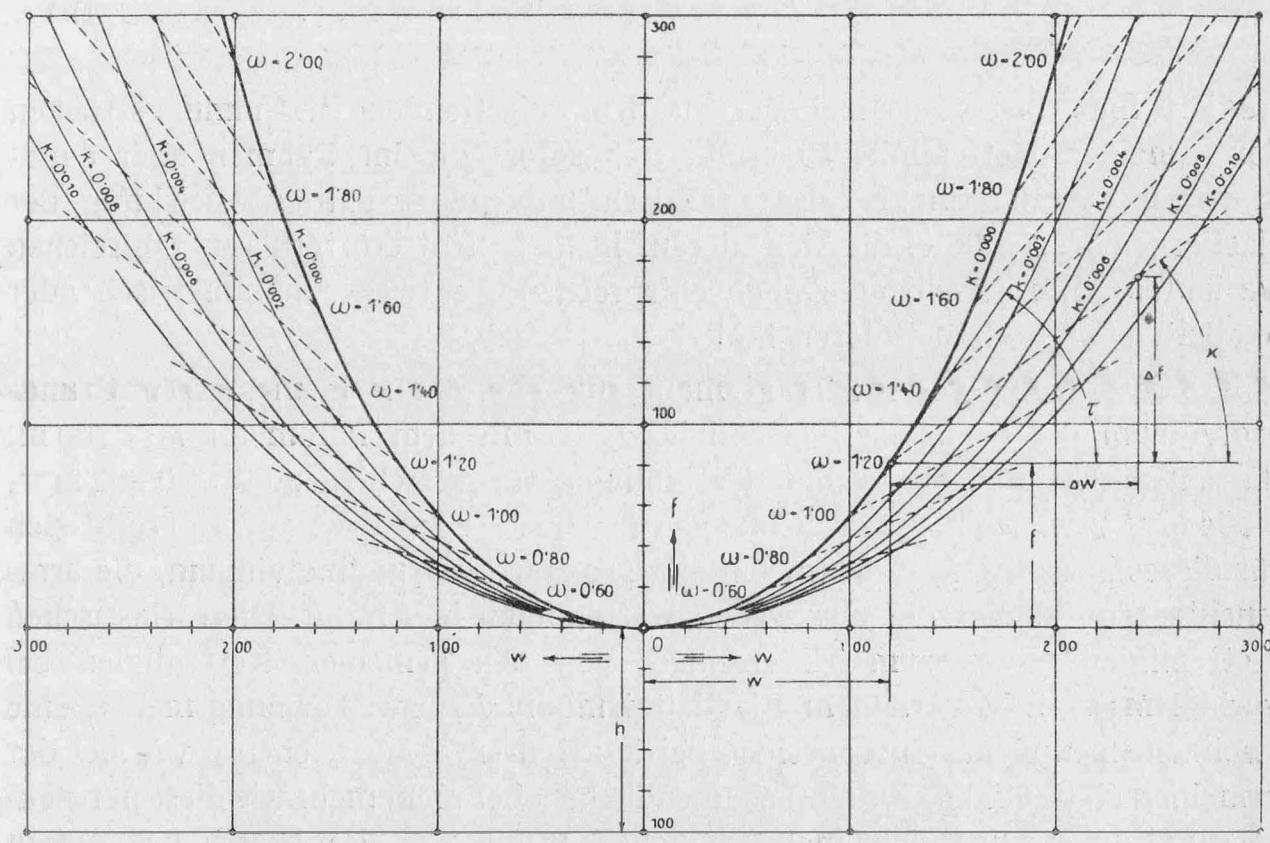


Abb. 2.

Als analytische Basis brauchen wir hiezu vor allem die Gleichung der elastischen Kettenlinie, bzw. analytische Ausdrücke für die an den Formeln für die gemeine Kettenlinie anzubringenden Korrekturglieder. Diese wurden

bereits von W. Scheil in seinem Buche „Theorie der Bewegung und der Kräfte“, II. Band, Leipzig 1880, S. 112—114, für kleine, in den höheren Potenzen vernachlässigbare Dehnungsmaße $\epsilon = \frac{1}{E}$ nach Reihen entwickelt. Wie ein kundiger Blick auf diese Ableitung lehrt, ist jedoch die von Scheil gemachte Einschränkung auf kleine ϵ vollkommen überflüssig; man gelangt vielmehr wie Verfasser erstmalig in seinem Aufsatz „Gleichgewichtsform eines dünnen, elastisch dehbaren Fadens — Elastische Kettenlinie“, „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, Band 2, Jahrgang 1922, Heft 6, S. 472 bis 474, gezeigt hat, sehr leicht zu einfachen, geschlossenen und für jedes beliebige endliche Dehnungsmaß ϵ , d. h. für jeden auch noch so kleinen endlichen Elastizitätsmodul E geltenden Formeln für die drei elastischen Korrekturen, welche sich mit den Bezeichnungen der Bestimmungsstücke Spannweite w , Bogenlänge l , Pfeilhöhe f , Parameter h und Endordinate z sowie unter Zusammenfassung der Seilkonstanten und des Elastizitätsmoduls in $k = \frac{p}{E \cdot F}$ in einfacherster Weise für einen vom Kettenlinienscheitel 0 gezählten Bogen l schreiben lassen:

$$\triangle w = k \cdot h \cdot l \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \text{I)}$$

$$\triangle f = \frac{1}{2} \cdot k \cdot l^2 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \text{II)}$$

$$\triangle l = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (l \cdot z + h \cdot w) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad \text{III)}$$

Addiert man diese Zusatzglieder zu den betreffenden Bestimmungsstücken der gemeinen Kettenlinie, so ergibt sich sofort die im Rahmen aller endlichen Dehnungsmaße, also praktisch unbegrenzt gültige Gleichung der elastischen Kettenlinie, die sich hierauf in hier nicht erörterbaren zahlreichen Varianten, dem jeweiligen Zweck entsprechend, entweder parametrisch oder explizit, analytisch definieren lässt.

Hier sei nur gesagt: Trägt man laut Abb. 2 zu einem starren Grundindividuum der gemeinen Kettenlinie, z. B. mit dem Parameter $h = 100$ m, die entsprechenden elastischen Kettenlinien für verschiedene $k = 0 \cdot 002 \text{ m}^{-1}$, $0 \cdot 004 \text{ m}^{-1}$ usw. nach den Bogenlängen $l = 60$ m, 80 m usw. auf, so ergibt sich für dieses gewählte h , d. h. für ein einziges starres Grundindividuum, die armleuchterartige Schar der elastischen Kettenlinien in Abb. 2. Diese elastischen Kettenlinien bilden zum Unterschied von den gemeinen Kettenlinien bei variablem k , d. h. variablem Elastizitätsmodul E , bzw. Dehnungsmaß ϵ , eine zweifach unendliche Kurvenschar, bei konstantem k aber, ebenso wie bei der gemeinen Kettenlinie, eine einfach unendliche, aber nicht mehr wie diese perspektive und daher auch nicht mehr ähnliche Kurvenschar. Bei bereits bekanntem Elastizitätsmodul E , bzw. k genügen also für die Festlegung eines beliebigen Bogenstückes einer elastischen Kettenlinie ebensoviele Angaben wie für die gemeine Kettenlinie.

Kennt man aber den Elastizitätsmodul, also auch den für ihn analytisch eintretenden Wert k noch nicht, was bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls

selbstredend der Fall ist, so muß ein und derselbe Kettenlinienbogen, genau markiert, bei mindestens drei voneinander möglichst verschiedenen Belastungen photogrammetrisch aufgenommen werden (Abb. 3).

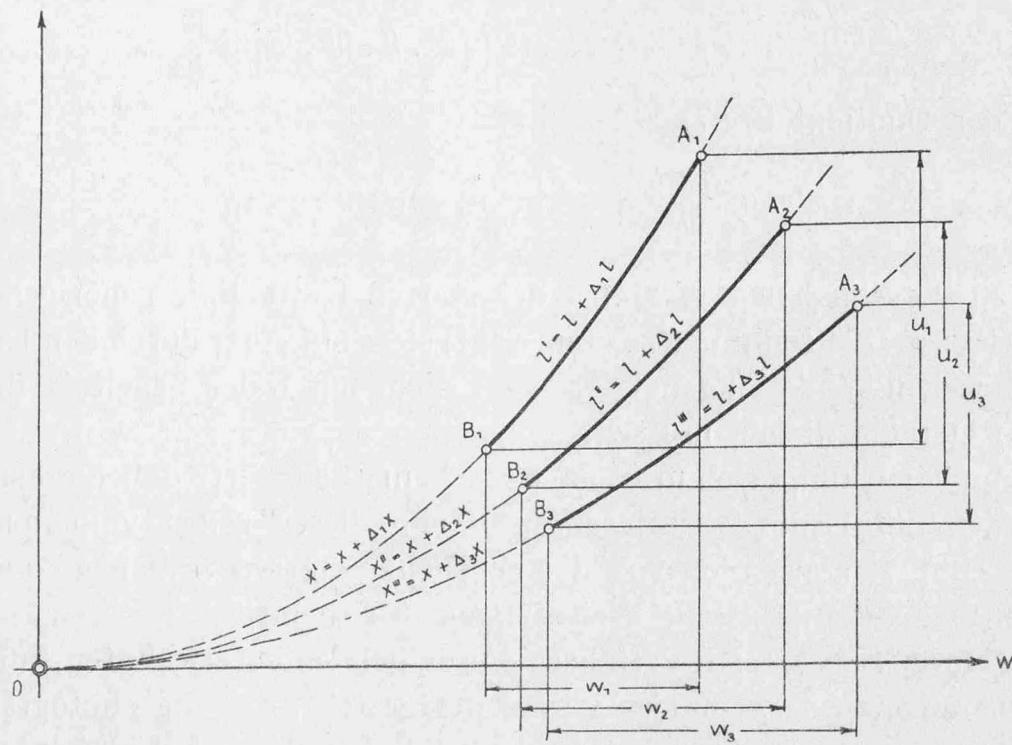


Abb. 3.

Die nachfolgenden sechs Bestimmungsgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = h_1 \cdot (\text{Ar Sin} \frac{l+x}{h_1} - \text{Ar Sin} \frac{x}{h_1}) + k \cdot h_1 \cdot l \quad \dots \dots \dots 1) \\ w_2 = h_2 \cdot (\text{Ar Sin} \frac{l+x}{h_2} - \text{Ar Sin} \frac{x}{h_2}) + k \cdot h_2 \cdot l \quad \dots \dots \dots 2) \\ w_3 = h_3 \cdot (\text{Ar Sin} \frac{l+x}{h_3} - \text{Ar Sin} \frac{x}{h_3}) + k \cdot h_3 \cdot l \quad \dots \dots \dots 3) \\ u_1 = \sqrt{h_1^2 + (l+x)^2} - \sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{2} \cdot k \cdot l \cdot (l+2 \cdot x) \quad \dots \dots \dots 4) \\ u_2 = \sqrt{h_2^2 + (l+x)^2} - \sqrt{h_2^2 + x^2} + \frac{1}{2} \cdot k \cdot l \cdot (l+2 \cdot x) \quad \dots \dots \dots 5) \\ u_3 = \sqrt{h_3^2 + (l+x)^2} - \sqrt{h_3^2 + x^2} + \frac{1}{2} \cdot k \cdot l \cdot (l+2 \cdot x) \quad \dots \dots \dots 6) \end{array} \right\} S,$$

in welchen die Unbekannten h_1 , h_2 , h_3 , l , x und k vorkommen, bilden das System S , das mittels Differenzengleichungen leicht zu lösen ist und nach Elimination der ersten fünf Unbekannten den Wert k , aus welchem sich der Elastizitätsmodul E sofort ergibt, liefert. Liegen — was man praktisch immer anstreben wird — mehr als drei Beobachtungen, bzw. photogrammetrische Aufnahmen vor, so sind auf das nunmehr überbestimmte System S die Methoden der Ausgleichsrechnung anzuwenden.

Von den vielen interessanten Eigentümlichkeiten der elastischen Kettenlinien seien hier nur zwei erwähnt, nämlich:

I. Schreibt man (zu Abb. 2):

$$\triangle w = k \cdot h \cdot l = k \cdot h^2 \cdot \sin \frac{w}{h} \quad \dots \dots \dots \quad 7)$$

und

$$\triangle f = \frac{1}{2} \cdot k \cdot l^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot h^2 \cdot \sin^2 \frac{w}{h} \quad \dots \dots \dots \quad 8),$$

so zeigt der Quotient 8) : 7)

$$\frac{\triangle f}{\triangle w} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{w}{h} = \tan \alpha = \frac{1}{2} \cdot \tan \tau \quad \dots \dots \dots \quad 9),$$

daß die zu verschiedenen Werten l der starren Kettenlinie gehörigen Punkte einer elastischen Kettenlinie (k = konstant) stets auf einer durch den Endpunkt von l unter dem Winkel α geneigten, aber nicht durch den Scheitel 0 der Schar gehenden Geraden liegen müssen.

II. Im Gleichungssystem S ist u. a. bemerkenswert, daß die elastischen Korrekturen der Ordinatendifferenzen u von diesen selbst vollkommen unabhängig sind, sondern bloß von der gegebenen starren Seillänge l abhängen, was noch manche analytische Weiterungen in sich birgt.

Das unter B skizzierte Verfahren wurde bei den vorerwähnten Aufnahmen noch nicht angewendet, sondern vorerst festgestellt, daß die photogrammetrischen Meßmethoden ausreichend genau sind, um den Elastizitätsmodul von Seilen an wirklichen, im Betrieb stehenden Objekten bestimmen zu können, wozu sich insbesonders die sehr starken Kräfteschwankungen ausgesetzten Donauseilfähren österreichischer Bauart in hervorragender Weise eignen dürften.

Über die Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze nach der Methode der Ausgleichung direkter Beobachtungen.

Von Dozent Ing. V. Theimer, Leoben.

Elegante Methoden zur Ausgleichung von unvollständigen und vollständigen Richtungssätzen findet man beispielsweise in Helmerts „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“, Seite 189, oder Eggerts „Handbuch der Vermessungskunde“, Band 1, Seite 295.

Dieselben gründen sich auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, und führen auf eine Reihe von Normalgleichungen, deren Auswertung mehr oder weniger zeitraubend ist.

Da es sich bei solchen Ausgleichungen in der Regel um die Gewichtsbestimmung der einzelnen Richtungen in Triangulierungsnetzen handelt, um dann die Netzausgleichung mit verschiedenen Gewichten durchführen zu können, so ist es vorteilhaft, zur Ausgleichung der Richtungssätze eine möglichst einfache Methode zu benützen, um die gesuchten Gewichte auf kurzem Wege, mit geringem Zeitaufwand zu finden.

Ich will daher in der nachstehenden Arbeit zeigen, wie die Ausgleichung von unvollständigen und vollständigen Richtungssätzen nach der Methode der direkten Beobachtungen in einfacher Weise durchgeführt werden kann.

Dabei soll der mittlere Fehler irgend einer Größe stets mit dem Buchstaben m und das Gewicht der Größe mit dem Buchstaben g bezeichnet werden, wobei ein beigefügter Index andeuten möge, zu welcher Größe der Fehler oder das Gewicht gehört. — Schließlich möge es mir gestattet sein, für jene Leser, die mit der Ausgleichungsrechnung nicht sehr vertraut sind, jene Formeln aus den Anfangsgründen der Ausgleichungsrechnung zu zitieren, die in der nachstehenden Arbeit zur Anwendung gelangen.

Ist m der mittlere Fehler einer Größe, dann nennt man

$$g = \frac{e^2}{m^2} \quad \dots \quad \text{I)}$$

das Gewicht dieser Größe. Dabei ist e ein Proportionalitätsfaktor, der sogenannte Gewichtseinheitsfehler, weil für $\dots m = e, \dots g = 1$ wird.

Sind $O_1, O_2 \dots O_N$ die Beobachtungswerte ein und derselben wahren Größe X und $g_1, g_2 \dots g_N$ die Gewichte dieser Beobachtungswerte, dann ist der wahrscheinlichste Wert von X , das allgemeine arithmetische Mittel:

$$x = \frac{[g O]}{[g]} = \frac{g_1 O_1 + g_2 O_2 + \dots + g_N O_N}{g_1 + g_2 + \dots + g_N} \quad \dots \quad \text{II)}$$

die Verbesserung der Größe O_i ist:

$$v_i = x - O_i; \dots i = 1, 2, 3 \dots N \quad \dots \quad \text{III})$$

der Gewichtseinheitsfehler wird:

$$e = \pm \sqrt{\frac{[g v v]}{N-1}} \quad \dots \quad \text{IV})$$

der mittlere Fehler der Beobachtung O_i ist:

$$m_{O_i} = \frac{e}{\sqrt{g_i}} = \pm \sqrt{\frac{[g \nu v]}{g_i(N-1)}} \quad \dots \quad V)$$

der mittlere Fehler des allgemeinen arithmetischen Mittels x ist:

$$m_x = \frac{e}{\sqrt{[g]}} = \pm \sqrt{\frac{[g \nu v]}{[g] \cdot (N-1)}} \quad \dots \quad VI)$$

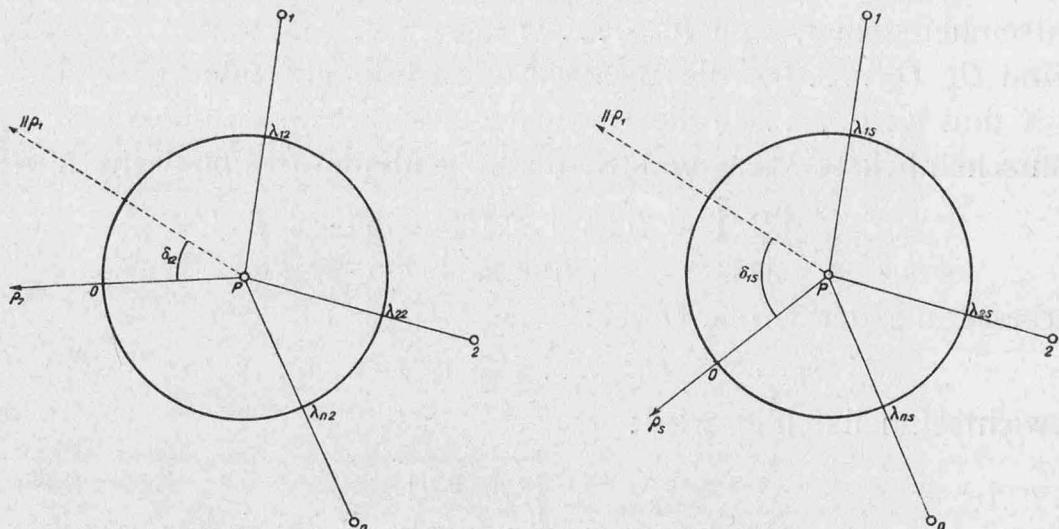
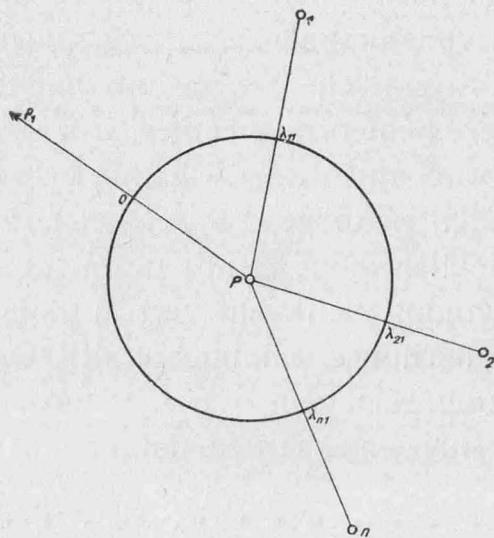
das Gewicht des allgemeinen arithmetischen Mittels x ist:

$$g_x = \frac{e^2}{m_x^2} = [g] \quad \dots \quad VII)$$

das Gewicht der Beobachtung O_i wird:

$$g_{O_i} = \frac{e^2}{m_{O_i}^2} = g_i \quad \dots \quad VIII)$$

Nach diesen Vorbereitungen denken wir uns nun in einem Triangulierungspunkte P etwa s Richtungssätze nach n benachbarten Triangulierungspunkten $1, 2, 3 \dots n$ gemacht. Diese Sätze mögen teils vollständig, teils unvollständig sein. Dabei verstehen wir unter einem unvollständigen Satz einen Satz, in dem eine oder auch mehrere Richtungen fehlen.



Um nun eine Vergleichung der Sätze untereinander durchführen zu können, muß man sie alle auf eine gemeinsame Nullrichtung zurückführen, also etwa auf die Nullrichtung des ersten Satzes. Hiezu ist die Kenntnis der Teilkreisverdrehungswinkel erforderlich.

In der Figurengruppe 1 sind für den Standpunkt P die gemachten Satzbeobachtungen mit den gegeneinander verdrehten Teilkreisstellungen skizziert.

Dabei sind die Nullrichtungen des Teilkreises in den Sätzen 1, 2 ... s mit $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_s$ bezeichnet, während die Verdrehungswinkel des Teilkreises zwischen dem ersten und zweiten, dem ersten und dritten, bzw. dem ersten und s -ten Satze mit $\delta_{12}, \delta_{13} \dots \delta_{1s}$ bezeichnet wurden.

Ist $\lambda_{\nu s}$ die fehlerfreie Richtungsablesung nach dem Punkte v im Satze σ und $\lambda_{\nu s}^0$ der zugeordnete Beobachtungswert, dann hat man folgende Beziehung:

$$\delta_{1s} = \lambda_{1s} - \lambda_{11} = \lambda_{2s} - \lambda_{21} = \dots = \lambda_{ns} - \lambda_{n1}; \dots \sigma = 2, 3, 4 \dots s \quad . \quad 1)$$

Setzt man in Gleichung 1) an Stelle der fehlerfreien λ -Werte die entsprechenden λ^0 -Werte ein, dann erhält man die Beobachtungswerte $\delta_{1s}^{(\nu)}$ von δ_{1s} für die Indizes $\nu = 1, 2, 3 \dots n$.

Bezeichnet man die Verbesserungen dieser $\delta_{1s}^{(\nu)}$ mit $V_{1s}^{(\nu)}$, dann wird:

$$\delta_{1s} = \underbrace{(\lambda_{1s}^0 - \lambda_{11}^0)}_{\delta_{1s}^{(1)}} + V_{1s}^{(1)} = \underbrace{(\lambda_{2s}^0 - \lambda_{21}^0)}_{\delta_{1s}^{(2)}} + V_{1s}^{(2)} = \dots = \underbrace{(\lambda_{ns}^0 - \lambda_{n1}^0)}_{\delta_{1s}^{(n)}} + V_{1s}^{(n)} \quad . \quad 2)$$

für $\dots \sigma = 2, 3, \dots s$.

Die Beobachtungswerte $\delta_{1s}^{(\nu)}$ sind untereinander prinzipiell gleich genau, weil sie stets die Differenz zweier korrespondierenden Richtungsablesungen sind. Nichtsdestoweniger aber sollen ihnen schon hier Gewichte beigelegt werden, erstens einmal deshalb, weil sie weiter unten mit Richtungen kombiniert werden sollen, die natürlich ein anderes Gewicht haben als die Winkel δ , und zweitens weil es für die allgemeine Darstellung vorteilhaft ist, jenen Beobachtungswerten $\delta_{1s}^{(\nu)}$, welche der Unvollständigkeit der Sätze wegen gar nicht gebildet werden konnten, die also gewissermaßen gar nicht vorhanden sind, einfach das Gewicht Null zuzulegen.

Ist m_λ der mittlere Fehler einer Richtung und m_δ der mittlere Fehler eines Winkels, dann wird bekanntlich

$$m_\delta^2 = 2 \cdot m_\lambda^2 \quad . \quad 3)$$

$$\text{Also ist wegen I)} \frac{m_\lambda^2}{m_\delta^2} = \frac{g_\delta}{g_\lambda}; \text{ somit } g_\delta = \frac{m_\lambda^2}{m_\delta^2} \cdot g_\lambda = \frac{1}{2} \cdot g_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Setzt man also das Gewicht einer Richtung $g_\lambda = 1$, dann muß das Gewicht eines Winkels $g_\delta = \frac{1}{2}$ sein. Nicht vorhandene Winkel aber erhalten das Gewicht Null.

Nun bilden wir aus 2) nach Formel II) den wahrscheinlichsten Wert von δ_{1s} :

$$\delta_{1s} = \frac{\left[g_{\delta_{1s}^{(\nu)}} \cdot \delta_{1s}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n}{\left[g_{\delta_{1s}^{(\nu)}} \right]_{\nu=1}^n} = \frac{g_{\delta_{1s}^{(1)}} \cdot \delta_{1s}^{(1)} + g_{\delta_{1s}^{(2)}} \cdot \delta_{1s}^{(2)} + \dots + g_{\delta_{1s}^{(n)}} \cdot \delta_{1s}^{(n)}}{g_{\delta_{1s}^{(1)}} + g_{\delta_{1s}^{(2)}} + \dots + g_{\delta_{1s}^{(n)}}}; \underline{\sigma = 2, 3, \dots s.} \quad 5)$$

Nach VI) ist das Quadrat des mittleren Fehlers von $\hat{\delta}_{1\sigma}$ gleich:

$$m_{\delta_{1\sigma}}^2 = \frac{e^2}{\left[g_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n} = \frac{\left[g_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)} \cdot V_{1\sigma}^{(\nu)} \cdot V_{1\sigma}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n}{\left[g_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n \cdot (N-1)} = \left\{ \text{da } N = 2 \left[g_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n ; \right\} =$$

$$= \frac{\left[g_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)} \cdot V_{1\sigma}^{(\nu)} \cdot V_{1\sigma}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n}{\left[g_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n \cdot \left(2 \left[g_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^n - 1 \right)} ; \text{ gültig für } \sigma = 2, 3, \dots, s . \quad (6)$$

Ferner wird der mittlere Fehler eines Beobachtungswertes $\delta_{13}^{(v)}$ nach Gl. V) gewonnen aus:

$$m_{\delta_{1\sigma}^{(v)}}^2 = \frac{e^2}{g_{\delta_{1\sigma}^{(v)}}} = \left\{ \text{weil } g_{\delta_{1\sigma}^{(v)}} = g_\delta = \text{Gewicht einer Winkelmessung} \right\} = 2e^2. \quad 7)$$

Aus 6) und 7) folgt:

$$m_{\delta_{15}^{(y)}}^2 = - \frac{m_{\delta_{15}^{(y)}}^2}{2 \left[g_{\delta_{15}^{(y)}} \right]_{y=1}^y = n} = \frac{m_\lambda^2}{\left[g_{\delta_{15}^{(y)}} \right]_{y=1}^y = n} \quad \quad 8)$$

Und nun drücken wir uns die ausgeglichenen Werte aller, auf den ersten Satz reduzierten Richtungen wie folgt aus:

Um nun die Ausgleichung beenden zu können, muß man die Gewichte der O -Werte ermitteln. Die allgemeine Form dieser O -Werte ist: $O_{vz} = \lambda_{vz} - \delta_{1z}$, wobei speziell $\delta_{11} = 0$ ist.

Mithin wird:

$$m_{O_{\gamma\sigma}}^2 = m_{\lambda_{\gamma\sigma}^0}^2 + m_{\delta_{1\sigma}}^2 \stackrel{8)}{=} m_\lambda^2 + \frac{m_\lambda^2}{\left[\frac{g_{\delta_{1\sigma}^{(\gamma)}}}{g_{\delta_{1\sigma}}} \right]_{\gamma=1}^{\gamma=n}} = m_\lambda^2 \cdot \frac{1}{\left[\frac{g_{\delta_{1\sigma}^{(\gamma)}}}{g_{\delta_{1\sigma}}} \right]_{\gamma=1}^{\gamma=n}} \quad . \quad (10)$$

Speziell im ersten Satze aber ist wegen

$$\delta_{11} = 0, \quad m_{O_{y_1}}^{-2} = m_{\lambda_{y_1}^0}^{-2} = m_{\lambda}^{-2} \quad \quad (11)$$

$$\text{Somit wird: } \frac{\frac{g_{O_{y_1}}}{g_\lambda}}{\frac{m_{O_{y_1}}^2}{m_\lambda^2}} = 1^{11)}$$

und

$$\frac{g_{O_{\sigma}}}{g_{\lambda}} = \frac{m_{\lambda}^2}{m_{O_{\sigma}}^2} \stackrel{10)}{=} \frac{\left[g_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}} \right]_{\nu=1}^{\nu=n}}{1 + \left[g_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}} \right]_{\nu=1}^{\nu=n}}; \text{ für } \sigma = 2, 3 \dots s.$$

Beachtet man noch, daß $\dots g_{\lambda} = 1 \dots$ ist, dann findet man aus den vorstehenden Gleichungen:

$$\underline{\underline{g_{O_{\sigma}} = 1; \text{ und } g_{O_{\sigma}} = \frac{\left[g_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}} \right]_{\nu=1}^{\nu=n}}{1 + \left[g_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}} \right]_{\nu=1}^{\nu=n}}; \text{ für } \sigma = 2, 3 \dots s}} \quad . \quad 12)$$

Nichtvorhandene O -Werte erhalten das Gewicht Null.

Hat man nach 12) die Gewichte der O -Werte berechnet, dann kann man die endgültigen Richtungen $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ als die allgemeinen arithmetischen Mittel aus den Gleichungen 9) berechnen. Es wird:

$$\lambda_1 = \frac{\left[g_{O_{1\sigma}} \cdot O_{1\sigma} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}{\left[g_{O_{1\sigma}} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}; \text{ und } m_{\lambda_1}^2 = \frac{\left[g_{O_{1\sigma}} \cdot v_{1\sigma} v_{1\sigma} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}{\left[g_{O_{1\sigma}} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s} \cdot (s_1 - 1)};$$

wobei $v_{1\sigma} = \lambda_1 - O_{1\sigma}$; für $\sigma = 1, 2 \dots s$; und s_1 = Anzahl der vorhandenen Werte $O_{1\sigma}$;

$$\lambda_2 = \frac{\left[g_{O_{2\sigma}} \cdot O_{2\sigma} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}{\left[g_{O_{2\sigma}} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}; \text{ und } m_{\lambda_2}^2 = \frac{\left[g_{O_{2\sigma}} \cdot v_{2\sigma} v_{2\sigma} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}{\left[g_{O_{2\sigma}} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s} \cdot (s_2 - 1)};$$

wobei $v_{2\sigma} = \lambda_2 - O_{2\sigma}$; für $\sigma = 1, 2 \dots s$; und s_2 = Anzahl der vorhandenen Werte $O_{2\sigma}$;

$$\lambda_n = \frac{\left[g_{O_{n\sigma}} \cdot O_{n\sigma} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}{\left[g_{O_{n\sigma}} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}; \text{ und } m_{\lambda_n}^2 = \frac{\left[g_{O_{n\sigma}} \cdot v_{n\sigma} v_{n\sigma} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}{\left[g_{O_{n\sigma}} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s} \cdot (s_n - 1)};$$

wobei $v_{n\sigma} = \lambda_n - O_{n\sigma}$; für $\sigma = 1, 2 \dots s$; und s_n = Anzahl der vorhandenen Werte $O_{n\sigma}$;

Und nun erhält man für die ausgeglichenen Werte $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ die Gewichtsproportion:

$$\underline{\underline{g_{\lambda_1} : g_{\lambda_2} : g_{\lambda_3} : \dots : g_{\lambda_s} = \frac{1}{m_{\lambda_1}^2} : \frac{1}{m_{\lambda_2}^2} : \frac{1}{m_{\lambda_3}^2} : \dots : \frac{1}{m_{\lambda_n}^2}}} \quad . \quad 14)$$

Wird dieses Verfahren für alle Triangulierungspunkte des Netzes angewendet, dann erhält man eine analoge Proportion für alle im Netze vorhandenen Richtungen; und damit ist die Gewichtsbestimmung der Richtungen im Netze durchgeführt.

* * *

Speziell für vollständige Richtungssätze sind alle $\delta_{1\sigma}^{(\nu)}$ wirklich vorhanden; also alle $g_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}} = \frac{1}{2}$.

Mithin bekommt man nach 5):

$$\underline{\delta_{1\sigma}} = \frac{g_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}} \cdot \left[\delta_{1\sigma}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^{\nu=n}}{g_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}} \cdot n} = \frac{\left[\delta_{1\sigma}^{(\nu)} \right]_{\nu=1}^{\nu=n}}{n} = \frac{\delta_{1\sigma}^{(1)} + \delta_{1\sigma}^{(2)} + \dots + \delta_{1\sigma}^{(n)}}{n}; \underline{\sigma = 2, 3, \dots, s} \quad 15)$$

und nach 6):

$$\underline{m_{\delta_{1\sigma}}^2 = -\frac{e^2}{\frac{1}{2} \cdot n} = \frac{2e^2}{n} = \frac{[V_{1\sigma}^{(\nu)} \cdot V_{1\sigma}^{(\nu)}]}{n \cdot (n-1)}; \underline{\sigma = 2, 3, \dots, s}} \quad 16)$$

Ferner nach 7):

$$\underline{m_{\delta_{1\sigma}}^{(\nu)2} = \frac{e^2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot e^2} \quad 17)$$

Aus 16) und 17) folgt:

$$\underline{m_{\delta_{1\sigma}}^2 = m_{\delta_{1\sigma}^{(\nu)}}^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{2m_\lambda^2}{n}} \quad 18)$$

Schließlich wird noch nach 12):

$$\underline{g_{O_{\nu 1}} = 1; \text{ und } g_{O_{\nu\sigma}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot n}{1 + \frac{1}{2} \cdot n} = \frac{n}{n+2}; \text{ für } \sigma = 2, 3, \dots, s} \quad 19)$$

Damit findet man nach 13) ganz allgemein:

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &= \frac{\left[g_{O_{\nu\sigma}} \cdot O_{\nu\sigma} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}}{\left[g_{O_{\nu\sigma}} \right]_{\sigma=1}^{\sigma=s}} = \frac{O_{\nu 1} + \frac{n}{n+2} \cdot (O_{\nu 2} + O_{\nu 3} + \dots + O_{\nu s})}{1 + \frac{n}{n+2} \cdot (s-1)} = \\ &= \frac{O_{\nu 1} + \frac{n}{n+2} (O_{\nu 1} + O_{\nu 2} + O_{\nu 3} + \dots + O_{\nu s}) - \frac{n}{n+2} O_{\nu 1}}{1 + \frac{n}{n+2} (s-1)} \end{aligned} \quad 20)$$

Nun wird aber:

$$\begin{aligned} O_{\nu 1} + O_{\nu 2} + O_{\nu 3} + \dots + O_{\nu s} &= \lambda_{\nu 1}^0 + (\lambda_{\nu 2}^0 - \delta_{12}) + (\lambda_{\nu 3}^0 - \delta_{13}) + \dots + (\lambda_{\nu s}^0 - \delta_{1s}) = \\ &= (\lambda_{\nu 1}^0 + \lambda_{\nu 2}^0 + \lambda_{\nu 3}^0 + \dots + \lambda_{\nu s}^0) - (\delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1s}) \end{aligned}$$

Beachtet man noch, daß der Verdrehungswinkel zwischen dem ersten und ersten Satze also $\delta_{11} = 0$ ist, so kann man auch schreiben:

$$O_{\nu 1} + O_{\nu 2} + O_{\nu 3} + \dots + O_{\nu s} = (\lambda_{\nu 1}^0 + \lambda_{\nu 2}^0 + \lambda_{\nu 3}^0 + \dots + \lambda_{\nu s}^0) - (\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1s}). \quad 21)$$

Nun ist allgemein:

$$\begin{aligned} \delta_{1\sigma} &= \frac{\delta_{1\sigma}^{(1)} + \delta_{1\sigma}^{(2)} + \dots + \delta_{1\sigma}^{(n)}}{n} = \frac{(\lambda_{1\sigma}^0 - \lambda_{11}^0) + (\lambda_{2\sigma}^0 - \lambda_{21}^0) + \dots + (\lambda_{n\sigma}^0 - \lambda_{n1}^0)}{n} = \\ &= \frac{\lambda_{1\sigma}^0 + \lambda_{2\sigma}^0 + \dots + \lambda_{n\sigma}^0}{n} - \frac{\lambda_{11}^0 + \lambda_{21}^0 + \dots + \lambda_{n1}^0}{n}. \end{aligned}$$

Setzt man also:

$$\underline{\frac{\lambda_{1\sigma}^0 + \lambda_{2\sigma}^0 + \dots + \lambda_{n\sigma}^0}{n} = r_\sigma; \text{ und } \frac{\lambda_{11}^0 + \lambda_{21}^0 + \dots + \lambda_{n1}^0}{n} = r_1} \quad 22)$$

dann wird $\underline{\delta_{1\sigma} = r_\sigma - r_1; \text{ für } \sigma = 1, 2, 3, \dots, s} \quad 23)$

Nach dieser Formel 23) findet man:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für } \sigma = 1; \delta_{11} = r_1 - r_1 = 0 \\ \text{,, } \sigma = 2; \delta_{12} = r_2 - r_1 \\ \text{,, } \sigma = 3; \delta_{13} = r_3 - r_1 \\ \cdot \\ \text{,, } \sigma = s; \delta_{1s} = r_s - r_1 \end{array} \right\} \text{addieren!} \\ \delta_{11} + \overline{\delta_{12} + \dots + \delta_{1s}} = (r_1 + r_2 + \dots + r_s) - s \cdot r_1 \quad . . . 24)$$

24) und 21) eingesetzt gibt:

$$O_{v1} + O_{v2} + O_{v3} + \dots + O_{vs} = (\lambda_{v1}^0 + \lambda_{v2}^0 + \dots + \lambda_{vs}^0) - (r_1 + r_2 + \dots + r_s) + s \cdot r_1$$

Setzt man jetzt noch $\frac{\lambda_{v1}^0 + \lambda_{v2}^0 + \dots + \lambda_{vs}^0}{s} = x_v$

und $\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_s}{s} = r$

. 25)

dann wird:

$$O_{v1} + O_{v2} + O_{v3} + \dots + O_{vs} = s \cdot x_v - s \cdot r + s \cdot r_1 = s(x_v - r + r_1) \quad . \quad 26)$$

Und diese Gleichung eingesetzt in 20) liefert unter Beachtung des Umstandes, daß $O_{v1} = \lambda_{v1}^0$ ist, das Resultat:

$$\lambda_v = \frac{\frac{2}{n+2} \cdot \lambda_{v_1}^0 + \frac{n}{n+2} \cdot s (x_v - r + r_1)}{1 + \frac{n}{n+2} \cdot (s-1)}; \text{ für } v = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Hat man nach 27) λ_v gefunden, dann kann man die Verbesserungen v_{v_3} der Werte $O_{v_3} = \lambda_{v_0} - \delta_{1_0}$ wie folgt berechnen:

$$\text{also } v_{y\sigma} = \lambda_y - O_{y\sigma} = \lambda_y - (\lambda_{y\sigma}^0 - \delta_{1\sigma}) = \lambda_y - \lambda_{y\sigma}^0 + \delta_{1\sigma} = \lambda_y - \lambda_{y\sigma}^0 + r_\sigma - r_1$$

$$v_{y\sigma} = \lambda_y - \lambda_{y\sigma}^0 + r_\sigma - r_1; \dots \text{ für } \begin{cases} \sigma = 1, 2 \dots s \\ y = 1, 2 \dots n \end{cases} \quad \dots \quad 28)$$

Mit den gefundenen v_{sg} rechnet man schließlich die mittleren Fehlerquadrate nach 13). Es wird:

$$m_{\lambda_y}^2 = \frac{\left[g_{O_{y_1}} \cdot v_{y_1} v_{y_1} \right]_{s=1}^{s=s}}{\left[g_{O_{y_s}} \right]_{s=1}^{s=s} \cdot (s-1)} = \frac{g_{O_{y_1}} \cdot {v_{y_1}}^2 + g_{O_{y_2}} \cdot {v_{y_2}}^2 + \dots + g_{O_{y_s}} \cdot {v_{y_s}}^2}{(g_{O_{y_1}} + g_{O_{y_2}} + \dots + g_{O_{y_s}}) \cdot s - 1}.$$

Oder mit Rücksicht auf 19):

$$m_{\lambda_v^2} = \frac{v_{v1}^2 + \frac{n}{n+2} \cdot (v_{v2}^2 + v_{v3}^2 + \dots + v_{vn}^2)}{\left\{1 + \frac{n}{n+2} \cdot (s-1)\right\} \cdot (s-1)}; \quad \text{für } v = 1, 2, 3 \dots n; \quad 29)$$

und damit findet man die Gewichtsproportion:

$$g_{\lambda_1} : g_{\lambda_2} : \dots : g_{\lambda_n} = \frac{1}{m_{\lambda_1}^{-2}} : \frac{1}{m_{\lambda_2}^{-2}} : \dots : \frac{1}{m_{\lambda_n}^{-2}}. \quad . . . \quad (30)$$

* * *

Damit wäre der theoretische Teil des vorgelegten Problems erschöpfend behandelt. Ich will jedoch noch zeigen, wie aus den vorstehenden Formeln jenes

Näherungsverfahren abgeleitet werden kann, das im Handbuche der Vermessungskunde von Jordan-Eggert auf Seite 199 ohne nähere Begründung tabellarisch durchgeführt wird.

Wir betrachten zu diesem Zwecke den Fall, wo die Anzahl der beobachteten Punkte $n = \infty$ ist.

Für $n = \infty$ ist nach 19):

$$\dots g_{O_1} = 1; \dots \text{und } \dots g_{O_s} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1, \dots 31)$$

dann wird nach 27):

$$\lambda_v = \frac{s(x_v - r + r_1)}{1 + (s-1)} = x_v - r + r_1 \dots \dots \dots 32)$$

und nach 28):

$$\underline{v_{\sigma}} = x_v - r + r_1 - \lambda_{v\sigma}^0 + r_\sigma - r_1 = x_v - \lambda_{v\sigma}^0 - r + r_\sigma; \dots 33)$$

gültig für $\begin{cases} v = 1, 2, 3 \dots n \\ \sigma = 1, 2, 3 \dots s. \end{cases}$

Dies aber sind die im Handbuch der Vermessungskunde angegebenen Verbesserungen!

Schließlich ist nach 29):

$$\underline{m_{\lambda_v}^2} = \frac{v_{v1}^2 + (v_{v2}^2 + v_{v3}^2 + \dots + v_{vs}^2)}{\{1 + (s-1)\} \cdot (s-1)} = \frac{v_{v1}^2 + v_{v2}^2 + \dots + v_{vs}^2}{s(s-1)} \quad 34)$$

Das im Handbuche der Vermessungskunde von Jordan-Eggert auf Seite 199 angegebene Näherungsverfahren ist also dann berechtigt, wenn die Anzahl n der beobachteten Richtungen so groß ist, daß man $\frac{n}{n+2} \doteq 1$ setzen darf, oder mit anderen Worten, daß alle Gewichte

$$g_{O_\sigma} \doteq 1 \text{ sind, für } \begin{cases} v = 1, 2, 3 \dots n \\ \sigma = 1, 2, 3 \dots s. \end{cases}$$

Nun soll der Vollständigkeit wegen noch ein Zahlenbeispiel für die Gewichtsbestimmung von unvollständigen Richtungssätzen durchgerechnet werden. Dabei wurde angenommen, daß 4 Richtungen in 4 Sätzen beobachtet wurden; also ist $n = 4$ und $s = 4$. Die Visuren, die bei der Beobachtung ausgelassen wurden, sind durch das Zeichen \sim angedeutet.

Zielpunkt-Nr.	Satz 1 λ_{v1}^0	Satz 2 λ_{v2}^0	Satz 3 λ_{v3}^0 $\lambda_{v4}^0 = \lambda_{vs}^0$	Satz 4 $= s$	Gewicht $g_{\delta_{12}}^{(v)}$	δ_{12}^0	Gewicht $g_{\delta_{13}}^{(v)}$	$\delta_{13}^{(v)}$	Gewicht $g_{\delta_{14}}^{(v)}$	$\delta_{14}^{(v)}$
1	0 , "	0 , "	0 , "	0 , "	$\frac{1}{2}$	19 59 50	$\frac{1}{2}$	40 00 05	$\frac{1}{2}$	59 59 45
2	30 00 30	50 00 25	70 00 15	\sim	$\frac{1}{2}$	19 59 55	$\frac{1}{2}$	39 59 45	\emptyset	.
3	60 00 25	80 00 20	\sim	\sim	$\frac{1}{2}$	19 59 55	\emptyset	.	\emptyset	.
$n=4$	80 00 10	100 00 30	120 00 10	140 00 20	$\frac{1}{2}$	20 00 20	$\frac{1}{2}$	40 00 00	$\frac{1}{2}$	60 00 10

Erst rechnet man die Werte δ_{1c} nach 5):

$$[g_{\delta_{12}}^{(v)}] =$$

$$[g_{\delta_{13}}^{(v)}] =$$

$$[g_{\delta_{14}}^{(v)}] =$$

$$\hat{\delta}_{12} = \frac{[g_{\delta_{12}}^{(v)} \cdot \hat{\delta}_{12}^{(v)}]}{[g_{\hat{\delta}_{12}}^{(v)}]} = \frac{(9^{\circ} 59' 55'') + (9^{\circ} 59' 57 \cdot 5'') + (9^{\circ} 59' 57 \cdot 5'') + (10^{\circ} 00' 10'')}{2} = 20^{\circ} 00' 00''$$

$$\hat{\delta}_{13} = \frac{[g_{\delta_{13}}^{(v)} \cdot \hat{\delta}_{13}^{(v)}]}{[g_{\delta_{15}}^{(v)}]} = \frac{(20^{\circ} 00' 02 \cdot 5'') + (19^{\circ} 59' 52 \cdot 5'') + (20^{\circ} 00' 00'')}{3/2} = 39^{\circ} 59' 56 \cdot 7''$$

$$\hat{\delta}_{14} = \frac{[g_{\delta_{14}}^{(v)} \cdot \hat{\delta}_{14}^{(v)}]}{[g_{\hat{\delta}_{14}}^{(v)}]} = \frac{(29^{\circ} 59' 52 \cdot 5'') + (30^{\circ} 00' 05'')}{1} = 59^{\circ} 59' 57 \cdot 5''$$

Nun rechnet man die Gewichte der O -Werte nach 12):

$$g_{O_{11}} = g_{O_{21}} = g_{O_{31}} = g_{O_{41}} = 1; \dots g_{O_{12}} = g_{O_{22}} = g_{O_{32}} = g_{O_{42}} = \frac{\left[g_{\delta_{12}}^{(v)} \right]_{v=1}^{v=4}}{1 + \left[g_{\hat{\delta}_{12}}^{(v)} \right]_{v=1}^{v=4}} = \frac{2}{3}$$

$$g_{O_{13}} = g_{O_{23}} = g_{O_{33}} = g_{O_{43}} = \frac{\left[g_{\delta_{13}}^{(v)} \right]_{v=1}^{v=4}}{1 + \left[g_{\hat{\delta}_{13}}^{(v)} \right]_{v=1}^{v=4}} = \frac{3}{5}; \dots g_{O_{14}} = g_{O_{24}} = g_{O_{34}} = g_{O_{44}} = \frac{\left[g_{\delta_{14}}^{(v)} \right]_{v=1}^{v=4}}{1 + \left[g_{\hat{\delta}_{14}}^{(v)} \right]_{v=1}^{v=4}} = \frac{1}{2}.$$

Die so bestimmten Gewichte gelten natürlich nur für vorhandene O -Werte; die nicht vorhandenen erhalten das Gewicht 0.

Nun berechnen wir tabellarisch nach den Formeln 13) die ausgeglichenen Richtungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, und ihre mittleren Fehler. Dabei führen wir der kürzeren Rechnung wegen Näherungswerte ein, indem wir uns daran erinnern, daß ganz allgemein:

$$\lambda = \frac{[g_o \cdot O]}{[g_o]} = \frac{[g_o \cdot (O_0 + dO)]}{[g_o]} = \frac{[g_o] \cdot O_0 + [g_o] \cdot dO}{[g_o]} = O_0 + \frac{[g_o \cdot dO]}{[g_o]}; \dots \text{wobei}$$

$\dots O_0$ = passend gewählter Näherungswert.

O_{v1}	O_{v2}	O_{v3}	O_{v4}	O_{v0} Näherungs- wert	$g_{O_{v1}}$	dO_{v1}	$g_{O_{v2}}$	dO_{v2}	$g_{O_{v3}}$	dO_{v3}	$g_{O_{v4}}$	dO_{v4}
0 , "	0 , "	0 , "	0 , "	0 , "			"	"	"	"	"	"
10 00 20	10 00 10	10 00 28·3	10 00 7·5	10 00 05	1	15	$\frac{2}{3}$	5	$\frac{3}{5}$	23·3	$\frac{1}{2}$	2·5
30 00 30	30 00 25	30 00 18·3	.	30 00 15	1	15	$\frac{2}{3}$	10	$\frac{3}{5}$	3·3	.	.
60 00 25	60 00 20	.	.	60 00 20	1	5	$\frac{2}{3}$	0
80 00 10	80 00 30	80 00 13·3	80 00 22·5	80 00 10	1	0	$\frac{2}{3}$	20	$\frac{3}{5}$	3·3	$\frac{1}{2}$	12·5

$[go \cdot dO]$	$[go]$	$\frac{[go \cdot dO]}{[go]}$	$\lambda_v = O_{v0} + \frac{[go \cdot dO]}{[go]}$	v_{v1}	v_{v2}	v_{v3}	v_{v4}
"		"	0 , "	"	"	"	"
$\frac{503\cdot45}{15}$	$\frac{83}{30}$	12·13	10 00 17·13	-2·87	7·13	-11·17	9·63
$\frac{354\cdot7}{15}$	$\frac{34}{15}$	10·43	30 00 25·43	-4·57	0·43	7·13	.
5	$\frac{5}{3}$	3·00	60 00 23·00	-2·00	3·00	.	.
$\frac{323\cdot45}{15}$	$\frac{83}{30}$	7·79	80 00 17·79	7·79	-12·21	4·49	-4·71

$g_{O_{v_1} \cdot v_{v1}}$	$g_{O_{v_2} \cdot v_{v2}}$	$g_{O_{v_3} \cdot v_{v3}}$	$g_{O_{v_4} \cdot v_{v4}}$	Probe $[g_{O_{v_3} \cdot v_{O_{v3}}}] = 0$	$g_{O_{v_1} \cdot v_{v1}}^2$	$g_{O_{v_2} \cdot v_{v2}}^2$	$g_{O_{v_3} \cdot v_{v3}}^2$	$g_{O_{v_4} \cdot v_{v4}}^2$
"	"	"	"	"				
-2·87	4·75	-6·70	4·89	0·07	8·24	22·56	44·89	23·14
-4·57	0·29	4·24	.	-0·04	20·88	0·09	17·98	.
-2·00	2·00	.	.	0·00	4·00	4·00	.	.
7·79	-8·14	2·69	-2·35	-0·01	60·68	66·26	7·24	55·22

Damit erhält man

$$m_{\lambda_1}^2 = 11·9 \quad m_{\lambda_2}^2 = 8·6 \quad m_{\lambda_3}^2 = 4·8 \quad m_{\lambda_4}^2 = 22·8$$

$$\text{also } m_{\lambda_1} = \pm 3·44'' \quad m_{\lambda_2} = \pm 2·92'' \quad m_{\lambda_3} = \pm 2·19'' \quad m_{\lambda_4} = \pm 4·77''$$

Somit erhält man die Gewichtsproportion:

$$g_{\lambda_1} : g_{\lambda_2} : g_{\lambda_3} : g_{\lambda_4} = \frac{1}{11·9} : \frac{1}{8·6} : \frac{1}{4·8} : \frac{1}{22·8} \doteq \frac{1}{12} : \frac{1}{9} : \frac{1}{5} : \frac{1}{23}.$$

Der Abschlußfehler in langen Polygonzügen.

Von Vermessungskommissär Ing. Dr. techn. K. Ulbrich, Wien.

Der Abschlußfehler der Polygonzüge kann in drei Variationen dargestellt werden. Erstens in der Form der Koordinatenabschlußfehler f_x und f_y , zweitens in der Form der Längsabweichung (Streckung) f_l und Querabweichung (Querverschwenkung) f_q und drittens in der Form des linearen Abschlußfehlers (Widerspruchsvektor) f .

Die mathematischen Beziehungen zwischen diesen Werten sind bekannt und lauten wie folgt:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{f_l^2 + f_q^2}$$
$$f_l = \frac{f_x [\Delta x] + f_y [\Delta y]}{\sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}}$$
$$f_q = \frac{f_x [\Delta y] - f_y [\Delta x]}{\sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}}$$

Alle diese Werte f_x , f_y , f_l , f_q und f werden in der Praxis nach der Abstimmung auf den Winkelschluß berechnet. Es ist also anzunehmen, daß ein Großteil der Wirkung der Winkelmeßfehler bereits eliminiert ist. Der Abschlußfehler, der in der Praxis zumeist ermittelt wird, ist also zum Großteil auf den Einfluß der Streckenmeßfehler und zum kleineren Teil auf die Auswirkung der Winkelmeßfehler zurückzuführen.

Die folgenden Zeilen sollen dazu verwendet werden, diese verschiedenen Fehlereinflüsse zu untersuchen und zu zeigen, wie der Abschlußfehler bei sehr langen Polygonzügen herabgedrückt werden könnte.

Der lineare Abschlußfehler f gibt über die auftretenden Fehlerverhältnisse keinen genügenden Aufschluß. Erst wenn man den linearen Abschlußfehler vektorisch auffaßt, also als Widerspruchsvektor \mathfrak{W} darstellt, womit automatisch dessen Länge f und dessen Richtung φ_f einbezogen wird, ist die Sachlage wesentlich aufschlußreicher. Trotzdem der lineare Abschlußfehler theoretisch ungenügend ist, gibt es Vermessungsinstruktionen, die f zur Aufstellung von amtlichen Fehlergrenzen verwenden. Solche Fehlergrenzen existieren z. B.:

Schweiz (1910)	$\triangle f = 0.01 \sqrt{[s]} + 0.10$ (mittlere Verhältn.)
Preußen (1881)	$\triangle f = 0.01 \sqrt{6 [s] + 0.0075 [s]^2}$
Württemberg (1895)	$\triangle f = 0.015 \sqrt{[s]} + 0.0006 [s] + 0.1 \sqrt{n - 1}$ (mittlere Verhältn.)
Baden (1916)	$\triangle f = 0.004 \sqrt{[s]} + 0.0002 [s] + 0.05$ (Hauptzüge)

Diese Fehlergrenzen für $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ wären wohl am einfachsten anzuwenden, da der lineare Abschlußfehler f sehr leicht gebildet werden kann und die Fehlergrenze eine Tabelle mit bloß einem Eingange darstellt. Sie hat aber den Nachteil, daß um den Sollwert ein Fehlerkreis gebildet wird, während in Wahrheit bei den Polygonzügen der üblichen Länge eine Fehlerellipse auftritt, deren größere Achse ungefähr in der allgemeinen Polygonzugs-

richtung liegt. Es ist also durch die obige Fehlergrenze eine zu große und unbegründete Abweichung von der allgemeinen Polygonzugsrichtung gestattet.

Theoretisch viel richtiger sind diejenigen Fehlergrenzen, die die Längenänderung f_l und die Querabweichung f_q getrennt erfassen. In Österreich waren schon in der Vermessungsinstruktion 1884 hiefür getrennte Fehlergrenzen vorhanden, die in Tabelle 1 angeführt sind und wie folgt lauteten:

$$\begin{aligned}\triangle l &= 0 \cdot 012 \sqrt{[s]} + 0 \cdot 06 \\ \triangle q &= (\sigma - \sigma') \cdot \frac{L}{\rho'} = \frac{2([s] + 100)}{L} \cdot \frac{L}{\rho'}.\end{aligned}$$

T a b e l l e 1.

Länge des Polygon- zuges [s] m	Bayern (1898) cm		Österreich Alte Fehlergrenze (1884 und 1904) cm		Österreich Neue Fehlergrenze (1931) cm		Deutscher Beirat für Vermessungswesen (1928) cm			
	$\triangle l$	$\triangle q$	$\triangle l$	$\triangle q$	$\triangle l$	$\triangle q$	$\triangle l_1$	$\triangle l_2$	$\triangle l_3$	$\triangle q$
300	24	12	27	20	21	10	17	21	24	11
500	35	17	33	34	28	15	24	29	34	17
700	45	22	38	47	35	19	31	37	44	23
900	55	27	42	61	41	24	38	45	53	31
1100	65	32	46	74	47	30	45	53	62	39
1300	75	37	49	88	53	38	51	61	71	48
1500	85	42	52	101	58	45	58	69	80	58
1700	94	47	55	115	64	54	64	77	89	69
1900	104	52	58	128	69	62	71	85	98	80

Bayern hat nach der Vermessungsinstruktion vom Jahre 1898 ebenfalls getrennte Fehlergrenzen, die in Tabelle 1 angeführt sind und wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}\triangle l &= 0 \cdot 0035 \sqrt{[s]} + 0 \cdot 00044 [s] + 0 \cdot 05 \\ \triangle q &= 0 \cdot 00025 [s] + 0 \cdot 05.\end{aligned}$$

Ferner wurden die Werte, die der Deutsche Beirat für Vermessungswesen 1928 als Richtlinien für amtliche Fehlergrenzen aufgestellt hat, angegeben. Diese Werte lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}\triangle l_1 &= 0 \cdot 002 \sqrt{[s]} + 0 \cdot 00030 [s] + 0 \cdot 05 \text{ (Günstige Verhältnisse)} \\ \triangle l_2 &= 0 \cdot 003 \sqrt{[s]} + 0 \cdot 00035 [s] + 0 \cdot 05 \text{ (Mittlere Verhältnisse)} \\ \triangle l_3 &= 0 \cdot 004 \sqrt{[s]} + 0 \cdot 00040 [s] + 0 \cdot 05 \text{ (Ungünstige Verhältnisse)} \\ \triangle q &= \frac{1'}{\rho'} \sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}} [s] + 0 \cdot 05.\end{aligned}$$

Diese obigen Werte sind auch in beiden Abbildungen eingezzeichnet. Sie stimmen mit den unrichtigen Werten in Jordans Handbuch der Vermessungskunde, Auflage 1931, Seite 522, nicht überein. (Besonders für $\triangle l_1$.)

Wichtig ist jetzt das Verhältnis, in dem die beiden tolerierten Werte zueinander stehen. Die Tabelle 1 gibt darüber Aufschluß. Man ersieht daraus, daß in Bayern das Verhältnis $f_l : f_q$ wie 2 : 1 ist. Die alte österreichische Fehler-

grenze war so beschaffen, daß ab 500 m Zuglänge die tolerierte Querabweichung größer war als die tolerierte Längsabweichung. Dieses Mißverhältnis wurde besonders bei längeren Polygonzügen sehr groß. Diese alte Fehlergrenze würde also einer Fehlerellipse mit der kleinen Achse in der allgemeinen Polygonzugsrichtung darstellen, statt der größeren Achse.

Deshalb wurde in Österreich 1931 eine neue Fehlergrenze aufgestellt, die auf empirischem Wege aus 1282 Polygonzügen von 806 km Länge gebildet

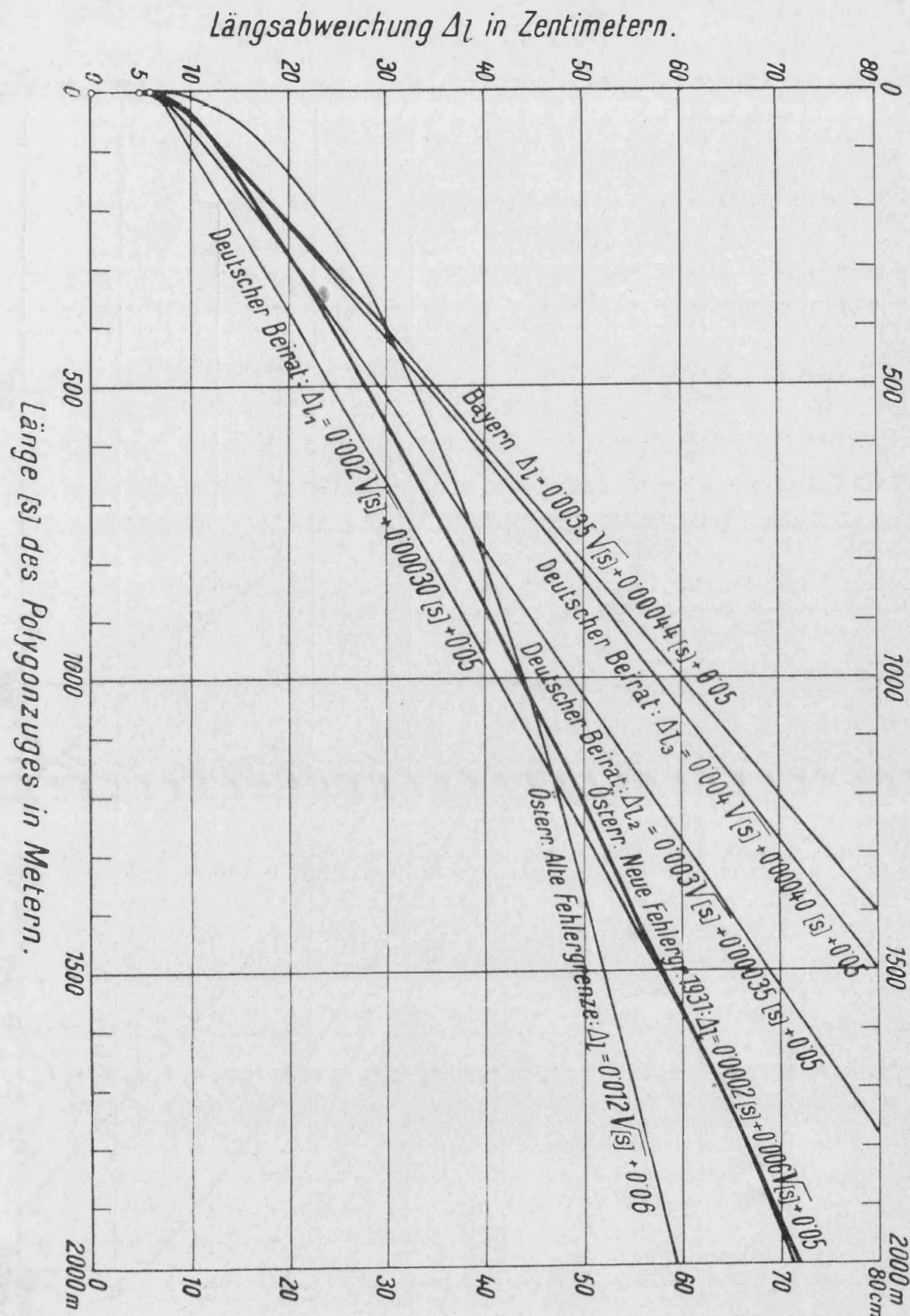


Abb. 1.

wurde. Die Ableitungen dieser Fehlergrenze werden vom Autor in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin 1932, veröffentlicht. Die Werte der neuen österreichischen Fehlergrenze sind sowohl in Tabelle 1, als auch in den beiden Abbildungen dargestellt und lauten wie folgt:

$$\Delta l = 0.0002 [s] + 0.006 \sqrt{[s]} + 0.05$$

$$\Delta q = \frac{45''}{\rho''} \sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}} [s] + 0.05$$

Querabweichung Δq in Zentimetern.

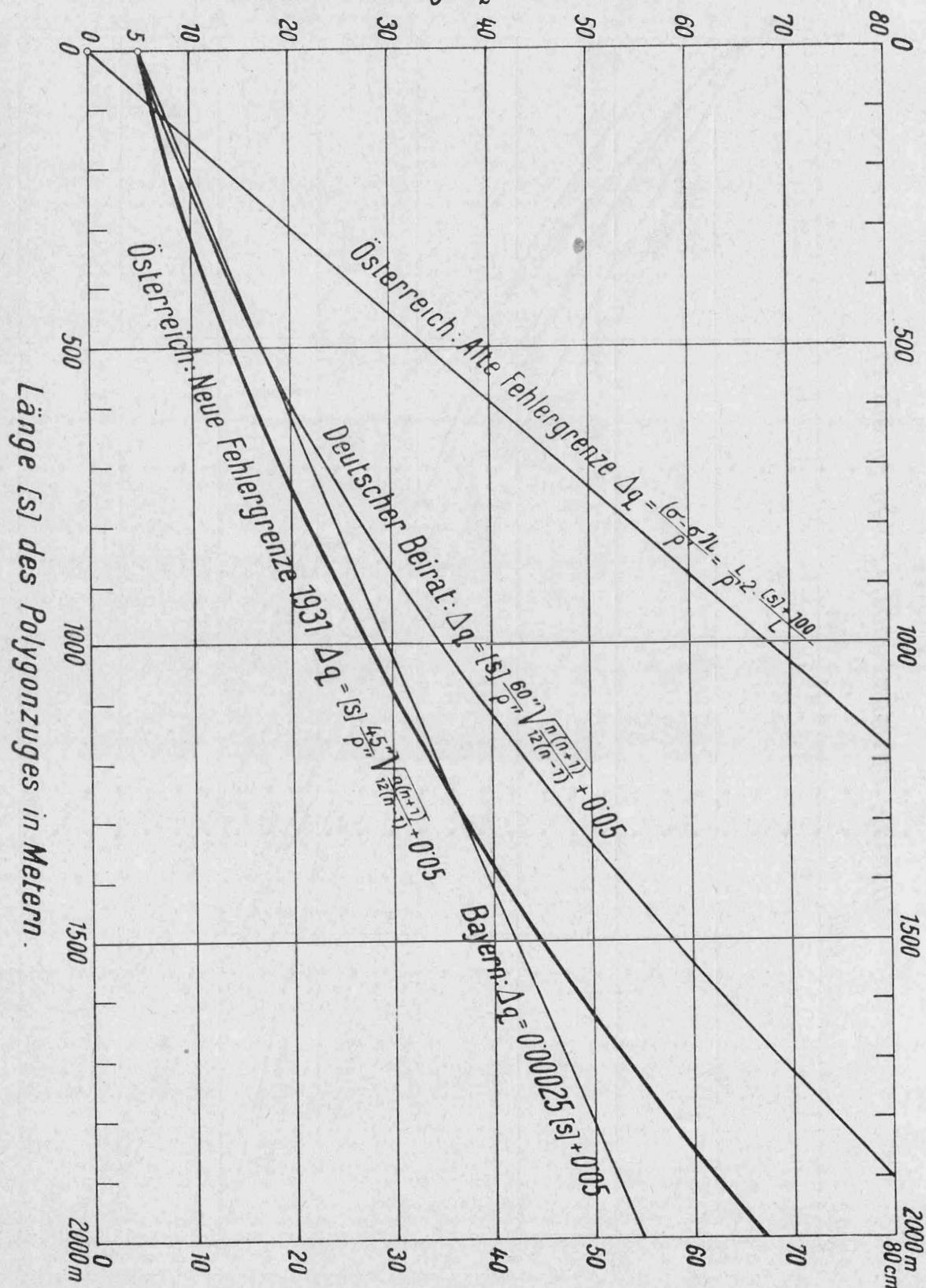


Abb. 2.

In Tabelle 2 sind die mittleren erreichten Werte aus den 1282 zur Aufstellung der Fehlergrenze benützten Polygonzügen dargestellt. Diese sehr aufschlußreiche Tabelle zeigt, daß das Verhältnis zwischen der Quer- und Längsabweichung von 1:2 bei 300 m Zuglänge auf 1:1 bei 2300 m Zuglänge fällt. Aus den tatsächlichen Messungsergebnissen ersieht man also, daß bei 2300 m Zuglänge die günstigste Form der Fehlerellipse, nämlich die Kreisform erreicht wird. Sind die Züge kürzer als 2·3 km, so liegt die längere Achse in der allgemeinen Zugrichtung und eine Steigerung der Genauigkeit wäre hauptsächlich durch erhöhte Präzision bei der Streckenmessung möglich, wodurch man eventuell die Kreisform erreichen könnte.

T a b e l l e 2.

Länge des Polygonzuges [s] m	Österreich Erreichte Fehler		$f_q : f_l$
	f_l cm	f_q cm	
300	8	4	1 : 2
500	11	5·5	1 : 2
700	14	7·5	1 : 1·9
900	16	9	1 : 1·8
1100	19	11	1 : 1·7
1300	21	14	1 : 1·5
1500	24	18	1 : 1·3
1700	26	20	1 : 1·3
1900	28	23	1 : 1·2
2100	30	27	1 : 1·1
2300	32	32	1 : 1

Auch die von anerkannten Fachleuten wohl überlegte Fehlergrenze des Deutschen Beirates für Vermessungswesen zeigt unter mittleren Verhältnissen, daß bei einer Zuglänge von ungefähr 2·2 km $\triangle l$ und $\triangle q$ gleich groß sind.

Eine Steigerung der Genauigkeit der Streckenmessung wäre aber wohl nur mit sehr hohen Kosten verbunden und ist für die heutigen Neuvermessungen gar nicht nötig.

Die Genauigkeit der Polygonseitenmessung hat sich sowohl mit dem Stahlbande, als auch mit dem Reduktionstachymeter Boßhardt-Zeiss als durchaus hinreichend bewährt.

Die Dichte der Detailtriangulierung sollte also bis auf mindestens 2·3 km gehen. Bei den österreichischen Neuvermessungen wurde aber sogar bis auf 1·5 km gegangen.

Bei Polygonzügen von über 2·3 km Länge ist die Querabweichung größer als die Längsabweichung. In diesen Fällen handelt es sich darum, die Querabweichung zu verkleinern, um die Kreisform für den Abschluß zu erreichen. Um nun den Einfluß der Winkelmeßfehler zu verringern, gibt es zwei Wege.

Erstens die Beobachtung von Zwischenorientierungen und zweitens die Verwendung von Wechselstativen.

Bezüglich der Fehlertheorie bei Zwischenorientierungen sei auf die Dissertation von K. Herrmann „Zur Fehlertheorie des zwischenorientierten Polygonzuges“, Allgemeine Vermessungsnachrichten 1929, verwiesen. Es wird nachgewiesen, daß bei drei Zwischenorientierungen, die bei einem 5 km langen, gestreckten Polygonzuge wohl leicht möglich sind, der mittlere Querfehler der Zugmitte beinahe nur den halben Wert des nicht zwischenorientierten Zuges erreicht. Die genaueren Werte betragen bei einem Polygonzuge von:

24	Polygonseiten	0·586	fache Genauigkeitssteigerung der Zugmitte.
36	„	0·559	
48	„	0·545	
60	„	0·536	

Hervorgehoben sei, daß die Einschaltung von sehr vielen Zwischenorientierungen wohl die Genauigkeit noch erhöht, aber nicht in einem solchen Ausmaße, daß es rentabel wäre. Die Einschaltung von bloß einer Zwischenorientierung in der Zugmitte ist unbedingt zu wenig und es sollten Anschlußrichtungen besonders zwischen dem ersten und zweiten sowie dem dritten und vierten Zugteil beobachtet werden.

Die Mehrarbeit am Felde ist ja sehr gering, da das Mitbeobachten von drei neuen Anschluß-Richtungen bei langen Polygonzügen gar nicht in die Waage fällt. Bei der Berechnung der Polygonzüge, also für die Kanzleiarbeit, soll nach den Angaben Herrmann's eine Mehrarbeit von zirka 25% erforderlich sein.

Die zweite Methode zur erfolgreichen Verringerung des Querfehlers besteht in der Verwendung von Wechselstativen. Die Vorteile und geringen Nachteile dieser Methode wurden von E. Harbert in der Abhandlung „Polygonisierung mit Zwangszentrierung“ in der Deutschen Zeitschrift für Vermessungswesen 1931 eingehend dargelegt. Die Einführung von Wechselstativen wird aber dadurch, daß die optische Distanzmessung besonders mittels des Boßhardt-Zeiss-Reduktionstachymeters immer größere Verbreitung gewinnt, wohl erschwert, da dabei die beiden Distanzlatten, bzw. die beiden vertikalen Standlatten, die sehr gut zentriert werden können, zugleich als Zielpunkte für die Winkelmessung verwendet werden.

Schließlich sei hervorgehoben, daß der mittlere Querfehler m_q auch von der Anzahl der Punkte im Polygonzuge abhängt. Im „Handbuch der Vermessungskunde“ von Jordan-Eggert, II. Band, ist diese Beziehung abgeleitet, die wie folgt lautet:

$$m_q = L \cdot m_w \cdot \underbrace{\frac{1'}{\rho'} \sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}}}_{W}$$

Dabei bedeutet L die Zuglänge, m_w den mittleren Fehler der Winkelmessung und n die Anzahl der Polygonpunkte des betreffenden Zuges einschließlich der Endpunkte.

Da die beiden ersten Faktoren für einen Zug konstant sind, so ändert sich die Querverschwenkung nur proportional zum W -Gliede. Dieser Einfluß ist sehr bedeutend und sei in der nachstehenden kleinen Tabelle 3 kurz angegeben.

T a b e l l e 3.

Anzahl n der Zugspunkte (Mit An- und Abschluß)	$W = \frac{l'}{\rho'} \sqrt{\frac{n(n+1)}{12(n-1)}}$
10	0'000 294
20	395
30	476
40	545
50	606

Man ersieht daraus, daß für einen Polygonzug von 4 km Länge bei 49 Seiten ($n = 50$) von durchschnittlich 82 m ein Querfehler von 61 cm zu erwarten ist, während der gleiche Zug mit nur 29 Seiten ($n = 30$) von durchschnittlich 138 m Länge einen Querfehler von 48 cm erwarten läßt. Dabei wurde ein mittlerer Fehler der Winkelmessung m_w mit 15" angenommen. Ein Betrag, der ohne besondere Hilfsmittel erreicht werden kann. Siehe Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen 1932 „Der Winkelabschlußfehler in Polygonzügen“. Man sieht also, daß das Verlangen nach langen Polygonseiten berechtigt ist, da bei Anwendung von kurzen Seiten in diesem Falle ein theoretischer Genauigkeitsverlust von ungefähr 30% eintritt.

Anlässlich der Festsetzung der neuen Fehlergrenzen durch den Deutschen Beirat für Vermessungswesen 1927 und 1928 sagte O. E g g e r t: „Bei meinen Fehleruntersuchungen über Polygonzüge hat sich ergeben, daß größere Zuglängen nicht so ungünstig sind, wie meistens angenommen wird. Die Züge können also in Zukunft etwas länger genommen werden, dann muß man beachten, daß die trigonometrischen Punktbestimmungen unter Umständen ungenauer sind als die direkte geometrische Messung. Die Ungenauigkeit, die infolge der gekrümmten Form der Züge sich erhöht, ist n i c h t so erheblich, wie bisher allgemein angenommen wird.“ (Siehe Sitzungsberichte S. 92.)

In der Diskussion sagte K e r l: „Wir stehen m. E. an einem Wendepunkt der jetzt üblichen Polygonisierungsmethode im engmaschigen Dreiecksnetze. Man wird vielleicht schon bald zu einer ganz anderen Bewertung langer Polygonzüge und damit auch zu einer anderen Auffassung über die Frage der Netzverdichtung kommen. Man wird lange Präzisionspolygonzüge im weitmaschigen Netze legen.“

Daß das Bedürfnis nach langen Polygonzügen tatsächlich besteht, hat besonders F. Praxmeyer in seiner Abhandlung „Erneuerung der österreichischen Katasterpläne“, Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen 1931, in überzeugender Weise dargelegt. Es wird in dieser Abhandlung vorgeführt, daß eine allmähliche Erneuerung der österreichischen Katasterpläne durch kartierungsfähige Aufmessung aller größeren Veränderungen direkt auf Polygonzüge erfolgen soll. Zu diesem Zwecke müßte also die Triangulierung 1. bis 4. Ordnung und schließlich die Detailtriangulierung in ganz Österreich vollendet sein, an die sich dann die Polygonzüge anschließen.

Nach den vorgeführten modernen Anschaulungen über die langen Polygonzüge dürfte es aber in Zukunft möglich sein, die Züge direkt an die Triangulierung 4. Ordnung anzuschließen. Man könnte also die Arbeit und die Kosten für die Detailtriangulierung ersparen. Die Triangulierung 4. Ordnung hat ja eine mittlere Seitenlänge von 4 bis 5 km und es müßte also nötig sein, für diese langen Züge ein kreisförmiges Gebiet für den Abschlußfehler zu erreichen. Führt man einen Polygonzug von 4 km auf gewöhnliche Weise durch, so ist für die Längsabweichung ein Wert von ungefähr 49 cm zu erwarten. Für die Querabweichung wäre, wenn man 49 Polygonseiten von durchschnittlich 82 m annimmt, ein Wert von ungefähr 68 cm zu erwarten. Diese beiden Werte wurden aus den Ergebnissen von 1282 österreichischen Polygonzügen extrapoliert, sind also etwas unsicher. Es wäre also die ungünstige Form der Fehlerellipse mit der kleineren Achse in der allgemeinen Zugrichtung vorhanden.

Führt man nun den Zug mit längeren Polygonseiten, z. B. mit 29 Seiten von durchschnittlich 138 m Länge durch, so stünde der Längsabweichung von 49 cm nur mehr eine Querabweichung von ungefähr 54 cm gegenüber. Die Kreisform ist also noch nicht ganz erreicht.

Wären in dem Zug drei Zwischenorientierungen gemacht worden, so wäre die Querabweichung der Zugmitte und damit sicherlich auch des Zugendes auf das ungefähr 0·6 fache gefallen, also bei einer durchschnittlichen Seitenlänge von 82 m eine Querabweichung von nur mehr 37 cm und bei einer Durchschnittslänge von 138 m eine Querabweichung von nur mehr 31 cm zu erwarten. In diesem Falle tritt also die gewünschte bessere Form des Abschlußfehlers auf.

Zum Schluß wurde noch die Richtung des Abschlußfehlers φ_f im Vergleich zur allgemeinen Zugrichtung φ bei 228 optisch und direkt gemessenen Polygonzügen von drei größeren Vermessungsoperaten untersucht. Die Ergebnisse scheinen in Tabelle 4 auf. Die Züge wurden in Längenintervallen zu je 200 m geordnet und die Differenzen $\varphi - \varphi_f$ gebildet und gezählt. Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, daß bei ungefähr Dreiviertel der Züge der Abschlußfehler beiläufig in der allgemeinen Zugsrichtung liegt, während nur bei ungefähr ein Viertel der Züge der Querfehler überwiegt. Bemerkt sei, daß diese Richtungen zugleich auch den Richtungen der Ausgleichsgeraden nach den graphisch-numerischen Ausgleichsverfahren von O. Egger entsprechen. Näheres siehe Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen 1928 „Die Ausgleichung von Polygonzügen nach der Methode der kleinsten Quadrate“.

T a b e l l e 4.

Länge der Polygonzüge [s] m	Zugsrichtung φ — Schlußfehlerrichtung φ_f				Summe
	$0^\circ - 30^\circ$	$30^\circ - 45^\circ$	$45^\circ - 60^\circ$	$60^\circ - 90^\circ$	
	und entsprechende Winkel der anderen Quadranten				
1	2	3	4	5	6
0 — 200	6	2	3	1	12
200 — 400	19	10	12	9	50
400 — 600	32	8	7	6	53
600 — 800	32	9	4	10	55
800 — 1000	18	7	4	3	32
1000 — 1200	13	1	—	1	15
1200 — 1400	5	2	1	—	8
über 1400	—	1	2	—	3
	125	40	33	30	228
	165 Polygonzüge		63 Polygonzüge		

Aus all dem vorher angeführten geht hervor, daß es möglich ist, sehr lange Polygonzüge ohne Genauigkeitsverlust durchzuführen, wenn gewisse, meist leicht einzuhaltende Bedingungen erfüllt werden. Vor allem sollen die Polygonseiten möglichst lang sein, eine Forderung, die schon seit jeher in allen Geodäsielehrbüchern aufgestellt wurde. Durch die neue 2 cm-Distanzlatte ist es auch mit dem Boßhardt-Zeiss-Reduktionstachymeter leicht möglich, bis auf 150 m Seitenlänge zu gehen, ohne daß die Ablesungen besondere Schwierigkeiten machen.

Die Beobachtung von drei Zwischenorientierungen dürfte, wenn es sich nicht um ausgesprochene Waldgebiete handelt, meist möglich sein. Außerdem besteht gerade in Waldgebieten nach den Ausführungen von F. Praxmeyer vorläufig gar kein Bedürfnis zur Polygonisierung. Das dringendste Erfordernis nach großzügigen Polygonisierungen besteht ja in den dicht besiedelten Bezirken, in denen viele Fortführungs- und Neuvermessungsarbeiten notwendig geworden sind.

Als Einwand gegen sehr lange Polygonzüge könnte erhoben werden, daß es schwierig sei, derart lange Züge in gestreckter Form zu führen. Hier können die Untersuchungen von O. Egger, Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen 1912, „Die zulässigen Abschlußfehler der Polygonzüge“ angeführt werden.

In dieser Abhandlung wird an schematisch gekrümmten Polygonzügen nachgewiesen, daß sogar bei S-förmigen Polygonzügen bis zu 45° Abweichung von der allgemeinen Zugsrichtung noch immer der Fall des gestreckten gleichseitigen Polygonzuges gelten darf.

Allerdings dürfte in extrem gekrümmten Polygonzügen der in der Praxis übliche Näherungsausgleich nicht mehr erfolgen, da nach unseren Erfahrungen dadurch Fehler entstehen, die schon an die Meßgenauigkeit heranreichen. In

diesen Fällen wäre aber unbedingt vor jedem anderen Näherungsausgleich zu warnen und es käme bloß der strenge Ausgleich in Frage. Dies erfordert keine so große Rechenarbeit, als häufig angenommen wird, wenn man nach der schon erwähnten graphisch-numerischen Methode von O. E g g e r t oder nach der vektor-analytischen Methode von R. S c h u m a n n ausgleicht, wobei beide Methoden natürlich, bis auf Abrundungsdifferenzen, gleiche und theoretisch einwandfreie richtige Werte ergeben.

S chlußbemerkungen und Zusammenfassung.

1. Der Abschlußfehler von Polygonzügen sollte unbedingt in der Form der Längsabweichung f_l und der Querabweichung f_q bestimmt werden. Es genügt graphische Darstellung.
2. Amtliche Fehlergrenzen sollten nur für diese beiden Werte erstellt werden und nicht für den linearen Abschlußfehler f .
3. Gewöhnlich gemessene Polygonzüge können ungefähr bis 2·3 km Länge haben. Die Triangulationen wären also bis auf zirka 2·3 km Seitenlänge zu verdichten.
4. In Zukunft dürften lange Polygonzüge bis zu 4 bis 5 km Länge eine erheblich größere Rolle spielen. Eine günstige Verkleinerung des Abschlußfehlers lässt sich sowohl durch möglichst lange Polygonseiten, als auch durch ungefähr drei Zwischenorientierungen herbeiführen. Auch die Polygonisierung mit Zwangszentrierung verkleinert den Abschlußfehler.
5. Die Komparierung der Längenmessung müßte sehr sorgfältig geschehen und dürfte nicht nur für eine Basis erfolgen, sondern müßte durch ganze Polygonzüge durchgeführt werden.
6. Die Detailtriangulierung könnte bei der Anwendung von langen Polygonzügen glatt entfallen.
7. Die Richtung des Abschlußfehlers stimmt im Großteil der Fälle mit der allgemeinen Zugsrichtung überein. Die Längsabweichung der Züge unter 2·0 km dominiert also gegenüber der Querverschwenkung.

Über den sphärischen Exzeß.

Von Senatsrat Ing. S. Wellisch, Wien.

1. Werden drei beliebige Punkte auf der Kugeloberfläche durch Großkreisbögen miteinander verbunden, so entstehen zwei sphärische Dreiecke, deren Exzesse zusammen den sphärischen Exzeß der ganzen Kugeloberfläche geben. Bezeichnet man die drei Innenwinkel eines sphärischen Dreiecks mit A, B, C , seinen Exzeß, den Überschuß ihrer Summe über zwei Rechte, mit ε , die drei Außenwinkel mit A', B', C' , so ist

$$\begin{aligned}A + B + C - 180^\circ &= \varepsilon \\A + A' &= B + B' = C + C' = 360^\circ \\A' + B' + C' &= 1080^\circ - (A + B + C) = 900^\circ - \varepsilon \\A' + B' + C' - 180^\circ &= 720^\circ - \varepsilon.\end{aligned}$$

Der sphärische Exzeß der ganzen Kugeloberfläche beträgt sohin 720° , eine Tatsache, die schon Girard 1629 in der „Invention nouvelle en l'algèbre“ ohne Beweis angeführt hat.

Ist F die gewölbte Fläche des Innendreiecks, O die Oberfläche und r der Halbmesser der Kugel, so bestehen, wenn der Radian, d. i. der Mittelpunktswinkel, dessen Bogenlänge gleich dem Radius ist, mit ρ bezeichnet wird, die Beziehungen:

$$\varphi^0 = \frac{180}{\pi}, \quad \frac{O}{r^2} \rho = 720^\circ, \quad \varepsilon = \frac{F}{r^2} \rho.$$

Bezeichnet man die den sphärischen Winkeln A, B, C entsprechenden Großkreisbögen mit α, β, γ und den Überschuß der Summe dieser Winkelbögen über den halben Großkreisumfang mit e , also

$$\alpha + \beta + \gamma - r\pi = e,$$

so besteht, mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$e = \frac{\varepsilon r}{\rho} = \frac{F}{r}$$

die Gleichung:

$$F = r e$$

und es gilt der Satz: Die sphärische Fläche eines Dreiecks ist inhaltsgleich dem doppelten Ausschnitt eines Kugelgroßkreises, dessen Bogen dem Überschusse der drei Winkelbögen über den Halbkreis gleichkommt. Dieser von Buzengiger 1818 aufgestellte Satz entspricht der bekannten Beziehung, daß die halbe Kugeloberfläche doppelt so groß ist, wie die Fläche des Kugelgroßkreises.

Es ist ferner

$$\varepsilon = \frac{e \rho}{r} \text{ oder } \frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{e}{r},$$

woraus der Satz hervorgeht: Der sphärische Exzeß oder „Winkelüberschuß“ ε verhält sich zum „Bogenüberschuß“ e , wie der Radian ρ zum Radius r .

2. Bezeichnet man die den sphärischen Dreieckswinkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten im Längenmaße mit a, b, c , die entsprechenden Winkel eines ebenen Dreiecks mit denselben Seitenlängen mit A^*, B^*, C^* und die Fläche des ebenen Dreiecks mit \triangle , so ist

$$\triangle = \frac{1}{2} b c \sin A^* = \frac{1}{2} a c \sin B^* = \frac{1}{2} a b \sin C^*$$

und für kleine Dreiecke mit hinreichender Genauigkeit

$$\varepsilon_0 = \frac{\triangle}{r^2} \rho \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 1)$$

Zur Berechnung der für größere Dreiecke statt der Fläche des ebenen Dreiecks einzuführenden Fläche des gewölbten Dreiecks dienen folgende Näherungsformeln:

von Buzengeiger¹⁾ $F_1 = \triangle \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24 r^2} \right) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 2)$

von Gauß²⁾ $F_2 = \triangle \sqrt{\frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A^* \cdot \sin B^* \cdot \sin C^*}} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 3)$

von Hansen³⁾

$$F_3 = \frac{1}{2} b c \sin A \left(1 + \frac{a^2}{8 r^2} - \frac{b^2}{24 r^2} - \frac{c^2}{24 r^2} + \frac{a^4}{96 r^4} - \frac{b^4}{480 r^4} + \frac{b^2 c^2}{144 r^4} - \frac{c^4}{480 r^4} \right) \quad 4)$$

bzw. die Formeln mit den Faktoren $\sin B$ oder $\sin C$, welche durch einfache zyklische Buchstabenvertauschung erhalten werden.

Der sphärische Exzeß ist dann, wenn er nicht direkt aus der Formel von L'Huilier⁴⁾

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s-c}{2} \dots \dots \dots \dots \dots \quad 5)$$

mit $s = \frac{a+b+c}{2}$ in Gradmaß berechnet werden kann, für irgend einen Wert von F_1, F_2 oder F_3 bestimmt aus

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \rho \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 6)$$

Mit Benützung des Bogenüberschusses e erhält man unabhängig von der Berechnung der Dreiecksfläche den Winkelüberschuß aus der Formel

$$\varepsilon = \frac{e \rho}{r} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 7)$$

3. Eines der größten Dreiecke in der deutschen Geodäsie ist das von Gauß und auch von Jordan mehrfach benutzte hannoversche Dreieck „Inselsberg—Hohehagen—Brocken“ mit den Winkelwerten:

¹⁾ Buzengeiger: Vergleich zweier sehr kleiner Dreiecke von gleichen Seiten, wovon das eine sphärisch, das andere eben ist. (Zeitschr. f. Astronomie und verwandte Wissenschaften. 6. Bd. 1818, S. 266.)

²⁾ Gauß: Disquisitiones generales circa superficies curvas. 1827. Art. 27.

³⁾ Hansen: Geodätische Untersuchungen. (Abhandlungen der mathem.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 8. Bd. 1865, S. 114.)

⁴⁾ L'Huilier: Polygonometrie. 1789.

$A = 40^\circ 39' 30,380''$	$A^* = 40^\circ 39' 25,430''$
$B = 86^\circ 13' 58,840''$	$B^* = 86^\circ 13' 53,890''$
$C = 53^\circ 06' 45,630''$	$C^* = 53^\circ 06' 40,680''$
$\Sigma = 180^\circ 00' 14,850''$	$180^\circ 00' 00,000''$

und den Seitenlängen:

$$\begin{array}{ll} a = 69\,194,105 \text{ m} & \log a = 4,840\,06909 \\ b = 105\,972,850 \text{ m} & \log b = 5,025\,19461 \\ c = 84\,941,060 \text{ m} & \log c = 4,929\,11767. \end{array}$$

Damit wird $\log \Delta = 9,467\,2289$

und mit dem aus der mittleren geographischen Breite $\varphi = 51^\circ 22' 34''$ berechneten mittleren Krümmungshalbmesser des Dreiecks

$$r = 6\,382\,075 \text{ m bzw. } \log \frac{1}{r^2} = 6,390\,0758 - 20 \text{ und } \log \rho'' = 5,314\,4251:$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \rho''}{r^2} = 14,850''.$$

Mit $F = 1,0000\,238 \Delta$ wird $\varepsilon = \frac{F \rho''}{r^2}$ nur um 3 Einheiten der vierten Sekundendezimale größer.

Die den sphärischen Winkeln entsprechenden Großkreisbögen sind für $k = \frac{r \pi}{180^\circ} = \frac{r \pi}{648000''} = 30,941173''$:

$$\begin{array}{ll} \alpha = kA = 4528\,871,250'' \\ \beta = kB = 9605\,341,854'' \\ \gamma = kC = 5916\,126,476'' \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 20050\,339,580'' \end{array}$$

der halbe Großkreisumfang ist $r\pi = 20049\,879,935$

Sohin ist der Bogenüberschuß $e = 459,645''$

und der sphärische Exzeß $\varepsilon = \frac{e \rho''}{r} = 14,855''$

d. i. um 0,005'' größer als die mit Benützung der genäherten Dreiecksflächen Δ oder F erhaltenen Werte.

4. Betrachten wir lediglich zur Gewinnung eines tieferen Einblickes in die Genauigkeit der vorstehenden Näherungsformeln ein Kugeldreieck, das von zwei unter einem Winkel von einem Grad sich schneidenden Meridianquadranten gebildet wird, so ist

$$\begin{array}{ll} A = \varepsilon = 1^\circ = 60' & B = C = 90^\circ \\ a = \frac{r \pi}{180} = \alpha & b = c = \frac{r \pi}{2} = \beta = \gamma. \end{array}$$

Für $r = 6370 \text{ km}$ erhält man durch Anwendung der Formeln der sphärischen Trigonometrie die Soll-Werte:

$$\begin{array}{lll} \alpha = 111,18 & A^* = 38' 11,842'' & A - A^* = 21' 48,158'' \\ \beta = 10005,97 & B^* = 89^\circ 40' 54,079'' & B - B^* = 19' 05,921 \\ \gamma = 10005,97 & C^* = 89^\circ 40' 54,079'' & C - C^* = 19' 05,921 \\ e = 111,18 & \Sigma = 180^\circ 00' 00,000'' & \varepsilon = 60' 00,000'' \end{array}$$

$$\Delta = \frac{r^2 \pi^2}{8} \sin A^* = 556210 \text{ km}^2$$

$$F = \frac{r^2 \pi}{180} = 708200 \text{ km}^2$$

$$e = \frac{F}{r} = \frac{708200}{6370} = 111,18 = x$$

$$\varepsilon = \frac{e \rho'}{r} = 60'.$$

Die für dieses übergroße Dreieck nicht mehr zulässige Formel (1) gibt statt $60'$ den viel kleineren Wert $\varepsilon_0 = 47' 07,389''$.

Die Formel (2) liefert die Näherungswerte:

$$F_1 = 670584 \text{ km}^2 \quad \varepsilon_1 = 56' 48,785''.$$

Mit der Formel (3) erhält man genauer:

$$F_2 = 697105 \text{ km}^2, \quad \varepsilon_2 = 59' 03,600''.$$

Die Formel (4) ergibt noch genauer:

$$F_3 = 708831 \text{ km}^2, \quad \varepsilon_3 = 60' 03,207''.$$

Die Gleichung (5) liefert wieder streng richtig:

$$\tg \frac{\varepsilon}{4} = \tg 15', \quad \varepsilon = 60'.$$

5. Zur Berechnung kleiner sphärischer Dreiecke dient der einfache Satz von Legendre, nach welchem die Verteilung des sphärischen Exzesses auf die drei Winkel gleichmäßig erfolgt. Demnach ist in den einfachsten Fällen

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3}, \quad B - B^* = \frac{\varepsilon}{3}, \quad C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} \dots 8)$$

Diese Regel ist für gleichseitige oder annähernd gleichseitige Dreiecke von noch so großer Fläche unbedingt richtig und genügt auch für ungleichseitige Dreiecke, deren Seiten gegen r klein von der ersten Ordnung sind. Für größere ungleichseitige Dreiecke bedarf die Legendre'sche Regel einer Verbesserung. Hierüber besteht eine ausgedehnte Literatur.

Der Legendre'sche Satz erschien zum ersten Male ohne Beweis in dem Artikel: „Mémoire sur les Opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la Terre.“ (Histoire de l'Académie royale des sciences. Paris 1787, VI., p. 358.) Den ersten Beweis hiezu lieferte Legendre im Jahre 1798 in dem Aufsatze: „Résolution des triangles sphériques, dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.“ (Delambre's „Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien“. Paris VII, Note III, p. 12.)

In geschichtlicher Beziehung seien noch folgende Quellen angeführt. Die Abhandlung: „Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde“ (in den „Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut National de France“. Paris 1806, Tome septième, première partie, p. 130) von Legendre. Die in der Dissertation von F. J. Müller: „Johann Georg Soldner, der Geodät“ (1914, S. 72 und 101) mitgeteilten Sätze von Soldner aus dem Jahre 1809, deren Entstehung bisher ein Rätsel bleibt,

Die Beweise in Crelle's „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ von Gauß: „Elementare Ableitung eines zuerst von Legendre aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie“ (22. Bd. 1841, S. 96) und von Winkler: „Kurze Ableitung des Legendre'schen Satzes über die Reduktion der Berechnung eines sphärischen auf die eines ebenen Dreiecks“ (44. Bd. 1852, S. 273). Grunert: „Über sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältnis zu dem Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind“ (Archiv für Mathematik und Physik. 9. Bd. 1847, S. 39). Nell: „Neue Herleitung des Legendre'schen Satzes, nebst einer Erweiterung desselben“ (Zeitschr. für Math. u. Phys. 19. Bd. 1874, S. 327). Helmert: „Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie“, 1880, S. 93. Hammer: „Noch ein Beweis des Legendre'schen Satzes“ (Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1911, S. 33 u. 252), wo auch weitere Literatur angegeben ist. Kowalewski: „Einfacher Beweis der Legendre'schen Formel“ (Zeitschr. f. Verm. 1915, S. 289). Frischau: „Legendre's Theorem“ (Österr. Zeitschr. f. Verm. 1916, S. 65).

6. Um die feinen Unterschiede in den bei dem Gebrauche der verschiedenen Formeln sich ergebenden Winkelreduktionen, die bei meßbaren sphärischen Dreiecken bis in die letzte praktisch noch mitzunehmende Dezimalstelle der Exzeßanteile fast gleichlautende Ergebnisse liefern, klarer zu durchschauen, sie gleichsam unter die Lupe nehmend, sei das im Punkt 4 in Betracht gezogene langgestreckte Dreieck, wie solches in der Landesvermessung gewiß nicht vorkommen kann, als ein die auftretenden Unterschiede besonders stark vergrößerndes Vergleichsbeispiel aus formellen Gründen numerisch durchgerechnet.

Die Aufteilung des feststehenden Winkelüberschusses $\varepsilon = 60'$ auf die drei Winkel nach dem einfachen Satze von Legendre gibt gemäß 8)

$$A - A^* = B - B^* = C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} = 20'.$$

Mit der Formel von Buzengeiger (1818, S. 268)

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon^2}{90\rho} (\cot B + \cot C - 2 \cot A) \dots . 9)$$

erhält man

$$A - A^* = 21' 19,992''$$

und analog $B - B^* = C - C^* = 19' 20,004''$.

Die von Buzengeiger 1818 (S. 266) zum ersten Male gebrachte, von Bessel⁵⁾ 1841 angewendete Formel

$$A - A^* = \frac{\Delta \rho}{3r^2} + \frac{\Delta \rho}{360r^4} (a^2 + 7b^2 + 7c^2) \dots 10)$$

liefert mit $\frac{\Delta \rho}{r^2} = \varepsilon = 60'$:

$$A - A^* = 21' 21,852''$$

⁵⁾ Bessel: „Über einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluß auf die Bestimmung der Figur der Erde.“ (Astronom. Nachrichten, Bd. 19, 1841, S. 97.)

und analog $B - B^* = C - C^* = 19' 19,074''$.

Seine a. a. O. S. 267 gegebene Formel

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180 r^2} (b^2 + c^2 - 2 a^2),$$

die auch Gauß, ohne Buzengeiger zu erwähnen, in eleganter Weise ableitet, und unter Einführung des Mittelwertes

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

die Form

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60 r^2} (m^2 - a^2) = \frac{\varepsilon}{3} \left(1 + \frac{m^2 - a^2}{20 r^2} \right) \quad 11)$$

annimmt, liefert:

$$A - A^* = 21' 38,684''$$

und analog $B - B^* = C - C^* = 19' 10,658''$

Mit der Formel von Frischau (1916, S. 88)

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{18 \rho \sin 2 A} + \frac{a^4 \operatorname{tg} A}{720 \rho} \quad 12)$$

erhält man

$$A - A^* = 21' 40,040''$$

und analog $B - B^* = C - C^* = 19' 09,980''$.

Grunert hat die Entwicklung noch weiter als Buzengeiger getrieben und folgende Formel aufgestellt:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{180 r^2} (2 a^2 - b^2 - c^2) - \\ - \frac{\varepsilon (38 a^4 - 19 b^4 - 19 c^4 - a^2 b^2 + 2 b^2 c^2 - c^2 a^2)}{90720 r^4},$$

zu welchem Ausdruck auch Hansen (1865, S. 221) kommt. Durch ordnen einiger Glieder erhält man sie in der von Neill gegebenen Gestalt:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \left| 1 + \frac{b^2 + c^2 - 2 a^2}{60 r^2} + \frac{19 (b^4 + c^4 - 2 a^4) + a^2 b^2 + a^2 c^2 - 2 b^2 c^2}{30 240 r^4} \right|.$$

Setzt man hierin $a^2 + b^2 + c^2 = 3 m^2$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3 n^4,$$

so wird $b^2 + c^2 - 2 a^2 = 3 (m^2 - a^2)$

$$19 (b^4 + c^4 - 2 a^4) = 57 (n^4 - a^4)$$

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 - 2 b^2 c^2 = 3 (n^4 - a^4) - 9 m^2 (m^2 - a^2)$$

und es entsteht die Formel von Helmert:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \left| 1 + \frac{m^2 - a^2}{20 r^2} + \frac{20 (n^4 - a^4) - 3 m^2 (m^2 - a^2)}{10080 r^4} \right|. . . 13)$$

Sie liefert die Ergebnisse:

$$A - A^* = 21' 47,382''$$

$$B - B^* = C - C^* = 19' 06,309''.$$

7. Es soll nun eine Verteilungsformel abgeleitet werden, die bei der Einfachheit des Ausdrückes von Gauß die Genauigkeit der Formel von Helmert noch übertrifft. Ausgehend von der Gleichung 11)

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \left(1 + \frac{m^2}{20r^2} - \frac{a^2}{20r^2} \right)$$

setzen wir nach Einführung eines Gliedes höherer Ordnung:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \left(1 + \frac{m^2}{20r^2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{20r^2} \right) = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1 - \frac{a^2}{20r^2}}{1 - \frac{m^2}{20r^2}}$$

und erhalten:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{20r^2 - a^2}{20r^2 - m^2}$$

oder, wenn $\frac{\varepsilon}{3(20r^2 - m^2)} = E$ gesetzt wird, die neuen, einfach gebauten und überaus genauen Formeln:

$$\left. \begin{array}{l} A - A^* = (20r^2 - a^2) E \\ B - B^* = (20r^2 - b^2) E \\ C - C^* = (20r^2 - c^2) E \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad .14)$$

Damit erhält man

$$A - A^* = 21' 47,528''$$

$$B - B^* = C - C^* = 19' 06,236''.$$

Nachstehende Zusammenstellung enthält die Ergebnisse des Vergleichsbeispiels, geordnet nach der Größe ihrer Fehler, welche durch Gegenüberstellung mit den im Punkte 4 berechneten Sollwerten ermittelt wurden.

Formel	Exzeß-Anteile		Fehler im Winkel	
	$A - A^*$	$B - B^*$ $C - C^*$	A^*	B^* oder C^*
Nr. 8 von Legendre . .	20' 00,000''	20' 00,000''	- 108,158''	+ 54,079''
Nr. 9 „ Buzengeiger . .	21 19,992	19 20,004	- 28,166	+ 14,083
Nr. 10 „ Buzengeiger . .	21 21,852	19 19,074	- 26,306	+ 13,153
Nr. 11 „ Gauß	21 38,684	19 10,658	- 9,474	+ 4,737
Nr. 12 „ Frisch auf . .	21 40,040	19 09,980	- 8,118	+ 4,059
Nr. 13 „ Helmert	21 47,382	19 06,309	- 0,776	+ 0,388
Nr. 14 „ neue Formel . .	21 47,528	19 06,236	- 0,630	+ 0,315
Soll-Werte	21 48,158	19 05,921	0	0

Auf den bei sphäroidischen Berechnungen von Dreiecken auf dem Ellipsoid zu berücksichtigenden Einfluß der von der geographischen Breite abhängigen Änderungen der Krümmungsmaße in den Eckpunkten des Dreiecks, der sich bei noch so großen Dreiecken der Landesvermessungen erst in der dritten Sekunden-dezimale auswirkt, wird hier nicht näher eingegangen. Diesbezüglich sei auf die ausführlichen Entwicklungen im „Handbuch der Vermessungskunde“ von Jordan-Eggert verwiesen.

Gemeinsame Bestimmung der Polhöhe und der Uhrkorrektion mit Hilfe von Zenithdistanzen eines Fixsternes zu beiden Seiten des Meridians.

Von Professor Dr. Ing. P. Werkmeister, Dresden.

Da die genaue Bestimmung der Zeit und der Polhöhe eine wenigstens genäherte Kenntnis der Polhöhe φ und der Uhrkorrektion Δu voraussetzt, so kann eine gemeinsame Bestimmung dieser beiden Größen unter Umständen von großem Nutzen sein. Im folgenden soll deshalb gezeigt werden, wie man φ und Δu gemeinsam mit Hilfe der zu beiden Seiten des Meridians gemessenen Zenithdistanzen eines Fixsternes mit einer für viele Zwecke ausreichenden Genauigkeit bestimmen kann. Für die Messung ist außer dem Instrument zum Messen der Zenithdistanzen eine z. B. nach Sternzeit gehende Uhr erforderlich. Die Zenithdistanzen werden alle in derselben Fernrohrlage gemessen; die Fehler der beiden Ablesemarken müssen deshalb in der üblichen Weise bestimmt und berücksichtigt werden.

Sind $z_1, z_2 \dots z_n$ die vom Einfluß der Refraktion befreiten, zu den Uhrzeiten $u_1, u_2 \dots u_n$ gemessenen Zenithdistanzen, so ist durch die Wertepaare $(u_1, z_1), (u_2, z_2) \dots (u_n, z_n)$ eine „fehlerzeigende Punktreihe“ $P_1, P_2 \dots P_n$ (Abb. 1) bestimmt, und man hat die Aufgabe, die „plausibelste Kurve“ dieser

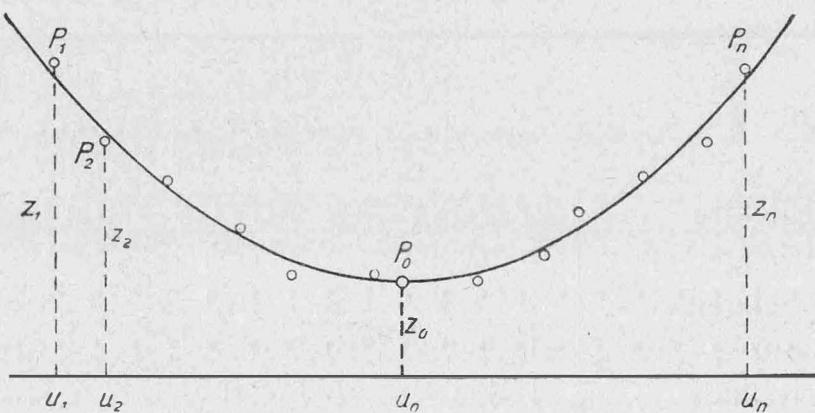


Abb. 1.

Punktreihe zu bestimmen. Durch den tiefsten Punkt P_0 dieser Kurve sind die Werte u_0 und z_0 und damit Δu und φ bestimmt; man erhält diese aus

$$\Delta u = \alpha - u_0 \text{ und } \varphi = z_0 \pm \delta \dots \dots \dots \dots \quad 1)$$

wenn α die Rektaszension und δ die Deklination des betreffenden Sternes sind.

Die plausibelste Kurve der fehlerzeigenden Punktreihe kann man auf drei Arten bestimmen; erstens zeichnerisch, sodann rechnerisch in der Weise, daß man die Kurve näherungsweise als Parabel betrachtet, und endlich rechnerisch durch Aufstellung einer durch das Dreieck Zenith—Pol—Stern bestimmten Gleichung.

I. Zeichnerische Bestimmung der plausibelsten Kurve der fehlerzeigenden Punktreihe.

Diese Lösung der vorliegenden Aufgabe besteht darin, daß man die durch die Wertepaare $(u_1, z_1), (u_2, z_2) \dots (u_n, z_n)$ bestimmten Punkte $P_1, P_2 \dots P_n$ unter Anwendung von passenden Maßstäben für u und z aufzeichnet und die plausibelste Kurve von freier Hand zeichnet.

Beispiel.

Die am 25. Mai 1931 mit dem Stern 109 Virginis ($\alpha = 14^h 42^m 47^s,7$ und $\delta = +2^{\circ} 10' 43'',9$) mit einem nach Sternzeit gehenden Boxchronometer und einem Universalinstrument mit 10 Sekunden Noniusangabe ausgeführten Messungen ergaben die folgenden, in bezug auf Refraktion und Fehler der Ablesemarken bereits verbesserten Werte

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$u = 14^h 18^m 13^s$	$22^m 56^s$	$28^m 20^s$	$33^m 36^s$	$37^m 10^s$	$40^m 08^s$	$43^m 16^s$
$z = 48^{\circ} 67' 54''$	$62' 19''$	$56' 58''$	$53' 28''$	$52' 08''$	$51' 18''$	$50' 58''$
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$u = 14^h 45^m 40^s$	$49^m 10^s$	$52^m 01^s$	$54^m 03^s$	$58^m 24^s$	$62^m 56^s$	$67^m 55^s$
$z = 48^{\circ} 51' 08''$	$52' 08''$	$53' 03''$	$54' 08''$	$57' 18''$	$61' 39''$	$67' 38''$

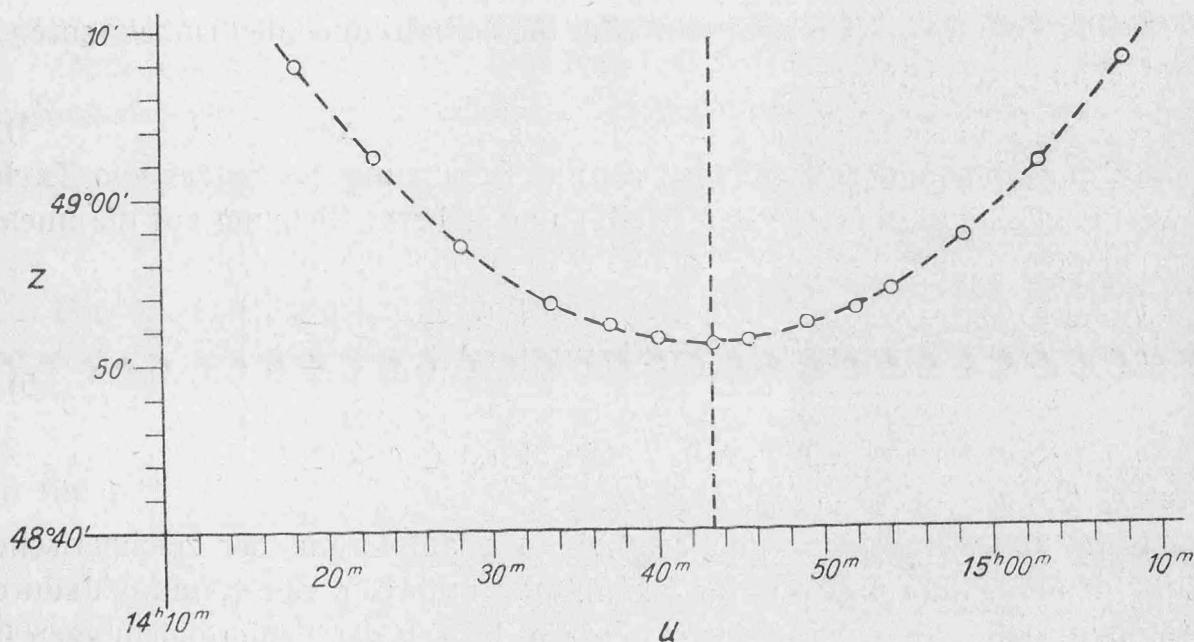


Abb. 2.

Die zu diesen Wertepaaren gehörige Punktreihe und die durch diese bestimmte Kurve sind in der Abb. 2 enthalten. Bestimmt man mit Hilfe einiger Sehnen parallel zur u -Achse den tiefsten Punkt der Kurve, so findet man mit diesem

$$u_0 = 14^h 43^m,3 \text{ und } z_0 = 48^{\circ} 51',0$$

und damit auf Grund der oben angegebenen Werte für α und δ

$$\triangle u = -0,5 = -30^s \text{ und } \varphi = 51^{\circ} 01',7 = 51^{\circ} 01' 42''.$$

2. Rechnerische Bestimmung der plausibelsten Kurve unter der Annahme, daß die Kurve eine Parabel ist.

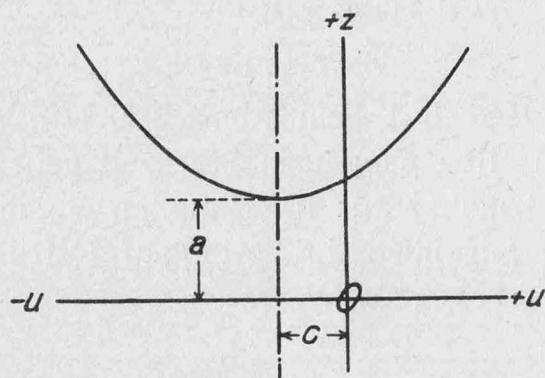


Abb. 3.

Bezeichnet man die scheinbaren Fehler der gemessenen z -Werte mit v_1, v_2, \dots, v_n , so hat man die n Fehlergleichungen

$$\left. \begin{array}{l} z_1 + v_1 = a + b(u_1 + c)^2 \\ z_2 + v_2 = a + b(u_2 + c)^2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ z_n + v_n = a + b(u_n + c)^2 \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 3)$$

Sind a_0 , b_0 und c_0 Näherungswerte für die zu bestimmenden Unbekannten a , b und c , und setzt man

$$a = a_0 + \Delta a, \quad b = b_0 + \Delta b \quad \text{und} \quad c = c_0 + \Delta c \quad \dots \quad 4)$$

so kann man die Fehlergleichungen (3) mit Benutzung des Satzes von Taylor bei Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung auf die lineare Form bringen

wobei $\triangle l_i = a_0 + b_0(u_i + c_0)^2 - z_i$ ist.

Näherungswerte für a und c erhält man auf Grund der zeichnerischen Lösung. Einen Näherungswert für b kann man mit Hilfe von a_0 und c_0 dadurch bestimmen, daß man z. B. in der ersten und letzten der Fehlergleichungen (3) die v -Werte gleich null setzt und von den beiden so sich ergebenden Werten den Mittelwert wählt.

Beispiel.

Läßt man bei dem oben angegebenen Zahlenbeispiel bei den u -Werten die Stunden und bei den z -Werten die Grade weg, so hat man die folgenden Wertepaare, bei denen u in Zeitminuten und z in Bogenminuten gesetzt sind:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$u = 18,2167$	22,9333	28,3333	33,6000	37,1667	40,1333	43,2667
$z = 67,9000$	62,3167	56,9667	53,4667	52,1333	51,3000	50,9667

8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$u = 45,6667$	$49,1667$	$52,0167$	$54,0500$	$58,4000$	$62,9333$	$67,9167$
$z = 51,1333$	$52,1333$	$53,0500$	$54,1333$	$57,3000$	$61,6500$	$67,6333$

Auf Grund der zeichnerischen Lösung ergeben sich die Näherungswerte

$$a_0 = 51,0000 \text{ und } c_0 = -43^m,3000$$

und damit $b_0 = 0,03$.

Setzt man mit Rücksicht auf die Zahlenrechnung $100 \triangle b = \triangle b'$, so ergeben sich die Fehlergleichungen *)

$$\begin{aligned} v_1 &= \triangle a + 6,2917 \triangle b' - 1,5050 \triangle c + 1,9752 \\ v_2 &= \triangle a + 4,1480 \triangle b' - 1,2220 \triangle c + 1,1274 \\ v_3 &= \triangle a + 2,2400 \triangle b' - 0,8980 \triangle c + 0,7534 \\ v_4 &= \triangle a + 0,9409 \triangle b' - 0,5820 \triangle c + 0,3560 \\ v_5 &= \triangle a + 0,3762 \triangle b' - 0,3680 \triangle c - 0,0048 \\ v_6 &= \triangle a + 0,1003 \triangle b' - 0,1900 \triangle c + 0,0008 \\ v_7 &= \triangle a + 0,0000 \triangle b' - 0,0020 \triangle c + 0,0333 \\ v_8 &= \triangle a + 0,0560 \triangle b' + 0,1420 \triangle c + 0,0347 \\ v_9 &= \triangle a + 0,3442 \triangle b' + 0,3520 \triangle c - 0,1008 \\ v_{10} &= \triangle a + 0,7598 \triangle b' + 0,5230 \triangle c + 0,2294 \\ v_{11} &= \triangle a + 1,1556 \triangle b' + 0,6450 \triangle c + 0,3336 \\ v_{12} &= \triangle a + 2,2801 \triangle b' + 0,9060 \triangle c + 0,5403 \\ v_{13} &= \triangle a + 3,8547 \triangle b' + 1,1780 \triangle c + 0,9140 \\ v_{14} &= \triangle a + 6,0598 \triangle b' + 1,4770 \triangle c + 1,5462 \end{aligned}$$

Damit erhält man wie üblich zur Bestimmung von $\triangle a$, $\triangle b'$ und $\triangle c$ die Normalgleichungen

$$\begin{array}{l} \underline{14} \triangle a + 28,6073 \triangle b' + 0,4560 \triangle c + 7,7387 = 0 \\ \dots \dots + \underline{121,6589} \triangle b' - 0,4257 \triangle c + 33,7765 = 0 \\ \dots \dots + \underline{10,2986} \triangle c - 1,0780 = 0 \end{array}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt

$$\triangle a = +0,0210, \triangle b' = -0,2822, \text{ also } \triangle b = -0,002822 \text{ und } \triangle c = +0,0921.$$

Damit und mit den angenommenen Näherungswerten findet man

$$a = 51,0210 \quad b = 0,027178 \quad c = -43^m,2079$$

und für die Gleichung der Parabel

$$z' = 51,0210 + 0,027178 (u - 43,2079)^2$$

Berechnet man an Hand dieser Gleichung die zu den gegebenen u -Werten gehörigen z' -Werte, so erhält man für diese

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$z' = 68' 00''$	$62' 12''$	$57' 02''$	$53' 32''$	$52' 01''$	$51' 17''$	$51' 01''$
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$z' = 51' 11''$	$51' 59''$	$53' 08''$	$54' 13''$	$57' 18''$	$61' 36''$	$67' 37''$

Berechnet man zur Probe die Verbesserungen $v_1, v_2 \dots v_{14}$ und mit diesen auf Grund der Gleichung $z'_i = z_i + v_i$ die ausgeglichenen Werte $z'_1, z'_2 \dots z'_{14}$, so findet man

*) Die Zahlenrechnung ist mit Rücksicht auf die Vergleiche im folgenden genauer durchgeführt als dies vom praktischen Standpunkte aus notwendig ist.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$z' = 67' 59''$	$62' 11''$	$57' 02''$	$53' 31''$	$52' 01''$	$51' 17''$	$51' 01''$
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$z' = 51' 11''$	$51' 59''$	$53' 08''$	$54' 13''$	$57' 18''$	$61' 36''$	$67' 38''$

Die Übereinstimmung der doppelt berechneten z' -Werte ist derart gut, daß eine Wiederholung der Rechnung mit besseren Näherungswerten nicht notwendig ist.

Führt man die Fehlerrechnung in der üblichen Weise zusammen mit der Auflösung der Normalgleichungen durch, so ergeben sich für die mittleren Fehler μ_a von a , μ_b von b und μ_c von c die Werte

$$\mu_a = \pm 0',034 = \pm 2'',0 \quad \mu_b = \pm 0,00011 \quad \mu_c = \pm 0^m,028 = \pm 1^s,7$$

Unter Beachtung der Gleichungen (1) erhält man als Endergebnis der ganzen Rechnung

$$\Delta u = -24^s.8 \pm 1^s.7 \text{ und } \varphi = 51^\circ 01' 45'',2 \pm 2'',0.$$

Die auf andere Weise genauer bestimmten Werte sind

$$\Delta u = -23^s.0 \pm 0^s.5 \text{ und } \varphi = 51^\circ 01' 49'' \pm 0''.5$$

3. Rechnerische Bestimmung der plausibelsten Kurve auf Grund einer aus dem Dreieck Zenith—Pol—Stern sich ergebenden Gleichung.

In dem Dreieck ZPS (Abb. 4) ist nach dem Cosinussatz

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t$$

oder mit $\sin \delta = a$ und $\cos \delta = b$

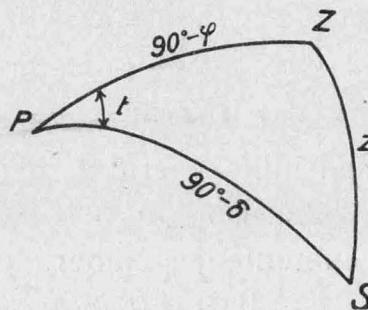


Abb. 4.

Nimmt man diese Gleichung als die Gleichung der plausibelsten Kurve an, und bezeichnet man die scheinbaren Fehler der gemessenen z-Werte wieder mit $v_1, v_2 \dots v_n$ und die der Uhrkorrektion Δu entsprechende Verbesserung der durch die Uhrangaben $u_1, u_2 \dots u_n$ bestimmten Stundenwinkel $t_1, t_2 \dots t_n$ mit Δt , so bestehen die n Fehlergleichungen

Diese Gleichungen kann man durch Anwendung des Satzes von Taylor in bezug auf Δt und die v -Werte linear machen; um dies auch in bezug auf φ

tun zu können, braucht man einen Näherungswert φ_0 . Setzt man

so lauten die Gleichungen (7)

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + v_1) &= a \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) + b \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) \cos(t_1 + \Delta t) \\ \cos(z_2 + v_2) &= a \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) + b \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) \cos(t_2 + \Delta t) \\ \dots &\dots \\ \cos(z_n + v_n) &= a \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) + b \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) \cos(t_n + \Delta t) \end{aligned}$$

Wendet man auf diese Gleichungen den Satz von Taylor an, so erhält man unter Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung die linearen Fehlergleichungen

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = A_1 \Delta \varphi + B_1 \Delta t + L_1 \\ v_2 = A_2 \Delta \varphi + B_2 \Delta t + L_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ v_n = A_n \Delta \varphi + B_n \Delta t + L_n \end{array} \right\} \quad \quad 9)$$

wobei $A_i = \frac{b \sin \varphi_0 \cos t_i - a \cos \varphi_0}{\sin z_i}$, $B_i = \frac{b \cos \varphi_0 \sin t_i}{\sin z_i}$

$$\text{und } L_i = \rho \frac{\cos z_i - a \sin \varphi_0 - b \cos \varphi_0 \cos t_i}{\sin z_i} \left(\text{mit } \varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \right).$$

Einen Näherungswert für φ erhält man auf Grund der zeichnerischen Lösung.

Beispiel.

Die dem oben angenommenen Zahlenbeispiel mit $\alpha = 14^h 42^m 47^s,7$ entsprechenden Wertepaare für den Stundenwinkel t und die Zenithdistanz z sind die folgenden:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$t = -6^{\circ}08'45''$	$-4^{\circ}58'00''$	$-3^{\circ}37'00''$	$-2^{\circ}18'00''$	$-1^{\circ}24'30''$	$-0^{\circ}40'00''$	$+0^{\circ}07'00''$
$z = 48^{\circ}67'54''$	$62'19''$	$56'58''$	$53'28''$	$52'08''$	$51'18''$	$50'58''$
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$t = +0^{\circ}43'00''$	$+1^{\circ}35'30''$	$+2^{\circ}18'15''$	$+2^{\circ}48'45''$	$+3^{\circ}54'00''$	$+5^{\circ}02'00''$	$+6^{\circ}16'45''$
$z = 48^{\circ}51'08''$	$52'08''$	$53'03''$	$54'08''$	$57'18''$	$61'39''$	$67'38''$

Nimmt man für φ den zeichnerisch sich ergebenden Näherungswert $\varphi_0 = 51^\circ 02' 00''$ an, so erhält man mit $\delta = + 2^\circ 10' 44''$ die Fehlergleichungen

v_1	=	0,98 990	$\triangle\varphi$	-	0,08 897	$\triangle t$	-	13,63 806
v_2	=	0,99 335	$\triangle\varphi$	-	0,07 205	$\triangle t$	-	19,12 010
v_3	=	0,99 650	$\triangle\varphi$	-	0,05 256	$\triangle t$	-	0,82 053
v_4	=	0,99 861	$\triangle\varphi$	-	0,03 347	$\triangle t$	+	5,47 514
v_5	=	0,99 946	$\triangle\varphi$	-	0,02 051	$\triangle t$	-	2,73 848
v_6	=	0,99 992	$\triangle\varphi$	-	0,00 971	$\triangle t$	+	5,47 812
v_7	=	1,00 008	$\triangle\varphi$	+	0,00 170	$\triangle t$	+	16,43 588
v_8	=	0,99 995	$\triangle\varphi$	+	0,01 044	$\triangle t$	+	19,17 418
v_9	=	0,99 938	$\triangle\varphi$	+	0,02 318	$\triangle t$	+	10,95 390
v_{10}	=	0,99 871	$\triangle\varphi$	+	0,03 353	$\triangle t$	+	30,11 645
v_{11}	=	0,99 802	$\triangle\varphi$	+	0,04 092	$\triangle t$	+	35,58 224
v_{12}	=	0,99 608	$\triangle\varphi$	+	0,05 668	$\triangle t$	+	35,55 346
v_{13}	=	0,99 340	$\triangle\varphi$	+	0,07 303	$\triangle t$	+	40,97 868
v_{14}	=	0,98 971	$\triangle\varphi$	+	0,09 091	$\triangle t$	+	46,37 249.

Damit ergeben sich in der üblichen Weise zur Bestimmung von $\Delta\varphi$ und Δt die Normalgleichungen

$$13,90\,647 \Delta\varphi + 0,05\,296 \Delta t + 209,06\,182 = 0$$

$$0,05\,296 \Delta\varphi + 0,03\,776 \Delta t + 14,62\,526 = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt

$$\Delta\varphi = -13'',6 \text{ also } \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi = 51^{\circ}01'46'',4$$

$$\text{und } \Delta t = -368'',19 \text{ oder } \Delta t = \Delta u = -24^s,5.$$

Mit dem so erhaltenen Wert für φ nimmt die Gleichung der plausibelsten Kurve der durch die Beobachtungen bestimmten fehlerzeigenden Punktreihe die Form an:

$$\cos z' = 0,02\,956 + 0,62\,847 \cos t'$$

wobei $t' = t + \Delta t$ ist. Berechnet man mit dieser Gleichung die z' -Werte zu den um Δt verbesserten Stundenwinkeln, so findet man

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$z' = 48^{\circ}68'00''$	$62'13''$	$57'03''$	$53'31''$	$52'00''$	$51'16''$	$51'00''$
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$z' = 48^{\circ}51'11''$	$51'57''$	$53'08''$	$54'13''$	$57'19''$	$61'38''$	$67'38''$

Berechnet man zur Probe die Verbesserungen $v_1, v_2 \dots v_{14}$ und mit ihrer Hilfe die ausgeglichenen Werte $z'_1, z'_2 \dots z'_{14}$ an Hand der Gleichung $z'_i = z_i + v_i$, so ergeben sich die Werte

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
$z' = 48^{\circ}68'00''$	$62'13''$	$57'03''$	$53'32''$	$51'59''$	$51'13''$	$51'00''$
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
$z' = 48^{\circ}51'10''$	$51'57''$	$53'07''$	$54'15''$	$57'19''$	$61'40''$	$67'37''$

Ein Vergleich der zusammengehörigen Werte zeigt eine derartige Übereinstimmung, daß eine Wiederholung der Rechnung mit besseren Näherungswerten nicht erforderlich ist.

Die in der bekannten Weise durchgeführte Fehlerrechnung ergibt für die mittleren Fehler μ_φ von φ und μ_t von t die Werte

$$\mu_\varphi = \pm 1'',6 \text{ und } \mu_t = \pm 30'',2 = \pm 2^s,0.$$

Das Ergebnis der ganzen Rechnung ist demnach

$$\Delta u = -24^s,5 \pm 2^s,0 \text{ und } \varphi = 51^{\circ}01'46'',4 \pm 1'',6$$

Die Übereinstimmung dieser Werte mit den oben schon angegebenen genauen Werten

$$\Delta u = -23^s,0 \pm 0^s,5 \text{ und } \varphi = 51^{\circ}01'49'' \pm 0'',5$$

ist recht gut. Die Abweichungen der mit Hilfe einer Parabel bestimmten Werte für Δu und φ von den zuletzt ermittelten Werten sind sehr gering; sie liegen weit innerhalb der durch die mittleren Fehler gezogenen Grenzen, so daß für die Bestimmung von Δu und φ die Annahme einer Parabel für die plausibelste Kurve vielfach genügt.

Die an zweiter Stelle angegebene Lösung hat im Vergleich zu der an dritter Stelle angeführten den Nachteil, daß man drei statt zwei Unbekannte zu bestimmen hat; andererseits sind aber bei der zweiten Lösung die Koeffizienten der Fehlergleichungen bequemer zu berechnen als bei der dritten Lösung.

Grubengrenzen in alter Zeit.

Von Professor Dr. P. Wilski, Aachen.

Wenn heutzutage jemand ein nutzbares Mineral gefunden hat, von dem erwartet werden kann, daß es in abbauwürdiger Menge vorhanden ist, so verleiht ihm die zuständige Bergbehörde — in Preußen, Bayern und Sachsen das Oberbergamt — auf Antrag ein Grubenfeld, das die Fundstelle umschließt. Der Verleihung wird eine Karte zugrundegelegt, der sogenannte Verleihungsriß, etwa in 1:2000 bis 1:10.000, in welchem die Grenzen des verliehenen Grubenfeldes eingezeichnet sind. Der Verlauf der eingezeichneten Grenzen bildet ein Vieleck, und die Eckpunkte des Vielecks sind nach rechtwinkligen Koordinaten gegeben. Ein Zwang, die Eckpunkte etwa im Felde zu versteinen, besteht nicht. Lotrechte Ebenen, durch die Seiten des Vielecks gelegt, bis in beliebige Tiefen hinabreichend, bilden die seitliche Abgrenzung des Grubenfeldes, die sogenannten Markscheiden. Die Markscheiden darf der Bergbau nicht durchbrechen, im Gegenteil, er muß sogar noch etwas von ihnen abbleiben¹⁾.

Diese Ordnung der Grenzverhältnisse erscheint uns heutzutage so vernünftig, daß wir geneigt sind, sie als selbstverständlich und als einzige mögliche Abgrenzung anzusehen. Aber es hat doch einer Jahrhunderte langen Entwicklung bedurft, um zu ihr zu gelangen, und anders geartete Begrenzungen ragen aus alter Zeit auch noch in die heutige Zeit hinein. Wir leben augenblicklich in einer Zeit raschen geistigen Fortschritts. Einen auffallenden Gegenstand hierzu bildet die Langsamkeit in der geistigen Entwicklung früherer Jahrhunderte.

Im folgenden soll in ganz großen Zügen gezeigt werden, welche Wandlungen im Laufe der Jahrhunderte die Ordnung der Grubengrenzen durchgemacht hat. Man ist, wenn man diesen Wandlungen nachgeht, immer wieder erstaunt, zu sehen, wie viele Vorstufen nötig waren, ehe die heutige einfache Ordnung erreicht war.

Zwergbergbau der alten Zeiten.

Wir werfen zunächst einen Blick auf die Verhältnisse des Trienter Bergbaus um 1208 n. Chr. Wenigstens schon drei bis vier Jahrhunderte war es damals her, daß im Trienter Bistum seit den Stürmen der Völkerwanderung wieder Erzbergbau umging²⁾. Man hatte damals bei Trier drei große Berggesell-

¹⁾ Im Ruhrbezirk z. B. 20 m, so daß dort zwischen zwei Nachbargruben ein 40 m breiter Sicherheitspfeiler bestehen bleibt; im Oberbergamtsbezirk Bonn und in Holland 10 m, so daß ein 20 m breiter Sicherheitspfeiler bestehen bleibt.

²⁾ Nach Srbik S. 243 liegen auf den Abhängen bei Trier (Küheberg, Mte. Dolasso, Falumberg) weit über 1000 Pingen mit großen trichterförmigen Höhlungen, und zwar teilweise in Reihen. Srbik zieht daraus den Schluß, daß dort in vorgeschichtlicher Zeit Bergbau umgegangen sein müsse. Hat Srbik recht, so hatte der vorgeschichtliche Trienter

schaften und zahlreiche ganz kleine Gewerkschaften. Alle bauten auf Silber. 1185 war es zwischen dem Bischof und den Bergleuten zu einer ersten schriftlichen Festsetzung des Gewohnheitsrechtes gekommen, das sich im Laufe der Jahrhunderte herausgebildet hatte. 1208 kam es zu einer zweiten Festsetzung, der sogenannten *Carta Laudamentorum*. In ihr wurde bestimmt, daß die Gruben, die auf einem Erzgange nebeneinander bauten, wenigstens 10 Schritt Abstand voneinander haben müßten. Von einer Abgrenzung der Gruben gegeneinander erfahren wir nichts, eine solche wird auch kaum stattgefunden haben. Denn es heißt in der *Carta Laudamentorum*: „item statuimus, quod de cetero aliquis non sit ausus capere aliquam presam, nisi fuerit decem passus una separata ab alia.“ (Desgleichen bestimmen wir, daß im übrigen niemand wagen soll, eine [Stelle für den Bergbau] in Besitz zu nehmen, wenn nicht eine Stelle von der andern 10 Schritt weit entfernt ist.) Also wählte wohl jede Gewerkschaft selber mit dem angeordneten Abstand die Stelle aus, wo sie Kübel und Seil hängen wollte. Natürlich wurden zwei Nachbargruben gelegentlich durchschlägig miteinander. Für diesen Fall bestimmte die Carta, daß der Fall der Obrigkeit zu melden sei, und diese werde dann über die Abgrenzung der Gruben gegeneinander entscheiden.

Es gab also noch keinen allgemein gültigen Grenzbegriff, sondern es war der Auffassung der Obrigkeit anheimgegeben, von Fall zu Fall zu entscheiden. Beachtenswert ist noch, daß von einer Tiefe, bis zu welcher die Erlaubnis zum Bergbau gegeben wurde, keine Rede ist. Bei der winzigen Kleinheit der Gruben und, da den Trierter Bergbau damals noch kein Stolln entwässerte, sondern nur ein „laborerium, ubi trahitur aqua“ (Wasserhebewerk), so waren nur ganz geringe Tiefen möglich, und die Bergbehörde nahm kein Interesse daran, dem Bergbau hinsichtlich der Tiefe eine Beschränkung aufzuerlegen.

Die erste Entwicklungsstufe einer wirklichen Grenzfestsetzung wird gebildet durch die Verleihung ganz kleiner Grubenfelder unter Angabe ihrer Dimensionen. In der Bergordnung Herzog Albrechts von Braunschweig von 1271 heißt es: „drittheyn grouen de schal en berch to rechtehebben, twisschen jowelker grouen drittheyn vote, vif vote in de wide sevene in de lenge.“ Daraus ist vielleicht zu schließen, daß lange vor 1271 am Harz ein Grubenfeld auf einem Erzgang dreizehn Fuß streichende Länge hatte, 5 Fuß Breite und vielleicht 7 Fuß Tiefe. Aber man kann die Worte allerdings auch so auffassen: 13 Fuß von Rundbaum zu Rundbaum, 5 Fuß Breite und 7 Fuß streichende Länge, so daß von der Tiefe also gar nichts gesagt wäre. Das uninteressierte Schweigen über die Tiefe würde den damaligen Zeiten entsprechen. Noch Jahrhunderte hindurch wurde bei Verleihung von Grubenfeldern über die Tiefe z u m e i s t gar nichts gesagt. Möglich ist also die Auffassung „13 Fuß von Rundbaum zu Rundbaum bei nur 7 Fuß streichender Länge der Gruben“. Das gäbe zwischen

Bergbau also schon Stollen, wie das reihenweise Vorkommen der Pingen erkennen läßt. Aber 1213 war bei Trient ein bergmännischer Stollnbau im Gange, so unbehilflich, daß man deutlich erkennt: es war seit Menschengedenken offenbar der erste Stolln jener Gegend. Also werden die Stürme der Völkerwanderung wohl die alte bergmännische Kultur vernichtet haben, und man mußte nach der Völkerwanderung von neuem anfangen.

zwei Gruben ein Bergfreies von 6 Fuß streichender Länge, also immerhin eine Verschwendung. Indessen um dieselbe Zeit war auch beim Schemnitzer Bergbau üblich, zwischen zwei benachbarten Bauen ein Bergfreies, eine Überschar, einzulegen, sie hatte beim Schemnitzer Bergbau sogar 7 Lachter streichende Länge³⁾. Aber welche Auffassung auch die richtige sein mag, jedenfalls sehen wir winzige Grubenfelder mit festbestimmten Erstreckungen sich lange⁴⁾ vor 1271 entwickeln.

Im Harz, in Sachsen, in Böhmen, im Salzburgischen, im Kärntner und im ungarischen Bergbau kam dann das Grubenfeld auf von 7 Klafter⁵⁾ streichender Länge und 7 Klafter Quererstreckung, im Kreuzstreichen des Ganges zu beiden Seiten des Ganges je $3\frac{1}{2}$ Lachter. Ein solches Grubenfeld nannte man ein „Lehen“. Über die Tiefe, bis zu welcher das „Lehen“ verliehen wurde, wurde in den ältesten Zeiten nichts Besonderes festgesetzt.

Mit den primitiven Hilfsmitteln des damaligen Bergbaus kam man von der kleinen Grundfläche aus nicht tief, und der an der Steuer interessierte Landesherr hatte schon gar nicht ein Interesse daran, dem Bergbauenden hinsichtlich der Tiefe eine Beschränkung aufzuerlegen.

Längenfelder und Geviertfelder. Konkordante und diskordante Grubenfelder. Stollnrecht und Schachtrecht.

Nach der Tiefe hin folgte die Verleihung dem Streichen und Einfallen des Ganges. War also der Gang auf die kurze Erstreckung eine schrägstehende ebene Platte, so schlossen sich zu beiden Seiten der Platte, in deren Liegendem und in ihrem Hangenden, je eine gleichgroße parallele, ebenso schräg stehende Platte an, im großen Ganzen aus dem tauben Nebengestein, der „ewigen Gänze“ bestehend, aber vielleicht mit Erzadern durchzogen und jede $3\frac{1}{2}$ Klafter oder Lachter dick. Diese beiden Platten bildeten die „Vierung“ des Ganges. Gang und Vierung zusammen mit der Grundfläche von 7 mal 7 Klaftern bildeten das „Lehen“. Zwei Lehen auf einem Gange nebeneinander hießen ein Wehr.

Solche Grubenfelder, welche an der Tagesoberfläche wesentlich länger als breit sind und über und unter Tage dem Streichen und Fallen eines Ganges folgen, nennt man heutzutage „Längenfelder“ oder „lange Felder“ oder auch „gestreckte Felder“. Das erste verliehene Längenfeld war also das Wehr, lange vor 1250. Drei Lehen oder drei Schnuren gab man noch 1490 in Tirol, fünf Lehen oder Schnuren 1532 im Salzburgischen. Um 1250 wurden beim Schemnitzer Bergbau bereits sieben nebeneinander liegende Lehen als „ein Berg“ zusammen verliehen. Und zwischen zwei Bergen blieb, wie schon gesagt, ein

³⁾ Nach Müller-Erzbach I S. 60 schreibt die Goslarer B. O. von 1359 zwischen zwei Nachbargruben einen Zwischenraum von 13 Fuß vor. Also muß man auch das für möglich halten, daß die Harzer Gruben von 1271 im Grundriß 5×7 Fuß hielten und zwischen je zwei solcher winzigen Gruben ein Bergfreies von 13 Fuß streichender Länge vorgeschrieben war.

⁴⁾ Lange vor 1271! Denn 1271 schließt ja die genannte Harzer B. O. schon 13 kleine Gruben zu „einem Berg“ zusammen, wobei dann wieder die Frage entsteht, wozu bei solchem Zusammenschluß denn die 12 bergfreien Stücke zwischen den 13 Gruben noch nötig oder nützlich waren.

⁵⁾ 1 Klafter = 1 Lachter, d. s. ungefähr 2 Meter.

Lehen Bergfreies. Die Vierung war hier jederseits ein Lehen breit. Einen solchen Berg nannte man im Schemnitzer Gebiet ein „scheyblich Lehen“. Über die Tiefenerstreckung des Schemnitzer scheyblich Lehen war im Schemnitzer Bergrecht nichts gesagt.

Man hatte übrigens in alten Zeiten auch Vierungen von noch anderen Maßen. So hatte man 1532 im Salzburgischen Vierungen von jederseits $2\frac{1}{2}$ Lehen Breite. Die Vierung wurde stets senkrecht zum Einfallen des Ganges gerechnet. Erst 1821 kam in Preußen auch horizontale Vierung auf.

Die Verleihung von Längenfeldern blieb Jahrhunderte hindurch üblich. Noch das Allg. Preuß. Landrecht von 1794 verlieh Längenfelder, ebenso das preußische rechtsrheinische Berggesetz von 1821, und auch noch ein preuß. Allerhöchster Erlaß von 1854 sah die Verleihung „langer Felder“ vor. Solche Grubenfelder dagegen, welche an der Tagesoberfläche im wesentlichen ebenso lang wie breit sind, heißen Geviertfelder oder Quadratfelder, gleichviel, wie ihre unterirdischen Grenzen verlaufen. Das „Lehen“ war also ein Geviertfeld.

Solche Grubenfelder, deren Grenzverlauf unter Tage sich nach dem Streichen und Fallen einer Ablagerung richtet, sei es Gang, Flöz, Lagerstätte oder Stockwerk, heißen konkordante Grubenfelder. Nimmt der Grenzverlauf keine Rücksicht auf das Verhalten der Ablagerung, sind die unterirdischen Markscheiden z. B. sämtlich lotrechte Ebenen, so spricht man von einem diskordanten Grubenfeld.

Hatte eine Ablagerung weniger als 15° bis 20° Einfallen, so wurden immer Geviertfelder verliehen, bei mehr als 15 bis 20 Grad in sehr alten Zeiten ja auch Geviertfelder in Gestalt des „Lehens“, aber schon lange vor 1250 in vielen Rechtsgebieten zumeist Längenfelder. Geviertfelder kamen aber auch später noch auf steilfallenden Erzlagern und Erzgängen vor. So verlieh man 1567 auf dem Hüttenberger Erzberg Geviertfelder von 20 Klafter Seitenlänge, seit 1759 von 40 Klafter. Im Homburgischen wurden 1570 die Eisensteingruben als Geviertfelder von 42 Lachter Seitenlänge verliehen.

Um eine besondere Art von Grenzen, die „flachen Markscheiden“ zu erklären, müssen wir jetzt etwas weit ausholen.

Die Gruben, welche auf einem steilfallenden Gange nebeneinander bauten, entwässerte und bewetterte man schon um 1250 durch einen Stolln, dem die Gruben dafür gewisse Gerechtsame schuldig waren, wenn der Stolln eine gewisse vorgeschriebene Tiefe von $7, 9\frac{1}{2}, 10$ Lachtern und die übrigen vorgeschriebenen Abmessungen hatte. Er hieß dann „Erbstolln“. Die Verleihungen hießen danach Verleihungen nach Stollnrecht. Die Verleihungen auf flach-fallenden, sogenannten schwebenden Gängen, die kein Erbstolln entwässerte, hießen im Gegensatz hierzu Verleihungen nach Schachtrecht.

Stollnrecht und Schachtrecht unterschied man schon um 1250. Verleihung nach Schachtrecht hieß also im wesentlichen soviel als Verleihung ohne Stollnbenutzung. Nach Schachtrecht wurde daher naturgemäß nur aus Not verliehen, wo Verleihung nach Stollnrecht nicht möglich war⁶⁾. Ver-

⁶⁾ Vgl. z. B. Salzburger B. O. 1532 § X.

leihungen nach Schachtrecht kamen aber nicht bloß auf schwebenden Gängen, sondern gelegentlich auch auf steil fallenden Gängen vor. Das Schemnitzer Bergrecht behandelt folgenden Fall. Auf einem Gange ist von über Tage her ein tonnlägiger (schrägliegender) Schacht niedergebracht und bringt Ausbeute. Über Tiefenerstreckung ist bei der Verleihung nichts festgesetzt worden, sie ist also zunächst in das Belieben des Bergbauenden gestellt. Nun wird in der Richtung des Einfallens des Ganges unterhalb des tonnlägigen Schachtes nach Schachtrecht ein zweites Grubenfeld verliehen. Ein Richtschacht (lotrechter Schacht) zu seiner Erschließung ist im Bau. Kommt nun der Richtschacht auf dem Erzgange an, ehe der tonnlägige Schacht zur Stelle ist, unterteuft er also den tonnlägigen Schacht, so wird auf dem Gange oberhalb des Richtschachtes und unterhalb des tonnlägigen Schachtes eine Grenze zwischen beiden festgesetzt, die dann die flache Markscheide heißt, und der Richtschacht kann dann von der flachen Markscheide aus den Gang abbauen, so weit er nach der Tiefe zu will, es sei denn, daß auch er von einem dritten Schacht unterteuft wird⁷⁾. Kommt dagegen der tonnlägige Schacht zuerst an und unterteuft also den Richtschacht, so hat der Richtschacht Mühe und Arbeit verloren.

Abgrenzung über Tage.

Die verliehenen Längenfelder mußten im Böhmischen schon 1280 verlochsteint werden. Unter einem Lochstein verstand und versteht man auch heute noch einen Grenzstein mit eingehauem Kreuz. Nur am Anfang und am Ende der Fundgrube, sowie der einzelnen Maßen mußte je ein Lochstein gesetzt werden. Die Verbindungslienien benachbarter Lochsteine waren parallel dem Streichen des Ganges in beliebigem Abstand. Die Linie konnte z. B. bei der Fundgrube durch den Fundschatz hindurchgehen. Lotrechte Ebenen, durch die Lochsteine senkrecht zum Gangstreichen gelegt, schlossen dann das Grubenfeld seitlich ab und bildeten, wie man in alten Zeiten sagte, dessen stehende Markscheiden; wie wir heute sagen, dessen Kopfmarkscheiden.

Aber überall wurde die Verlochsteinung nicht üblich. Die Salzburger B. O. von 1477 bestimmte nur ganz allgemein, daß Grubennachbarn „die Berckmass an den Tag mit ainander nemen“ sollen, ohne Bestimmteres anzugeben. Für den Tiroler Bergbau ist für 1468, 1490 und 1556 die „Verpflockung“ bezeugt. Ebenso war es 1517 in Österreich, Steiermark, Kärnten, Krain. Man überließ in diesen Bergaugebieten bei Verleihung der Grubenfelder die Tiefe nicht mehr dem Belieben des Bergbautreibenden, also des „Lehnträgers“, sondern setzte meist „15 Klafter im Saiger“ fest, stellenweise 10 oder 13 Klafter und bestimmte für die Abgrenzung über Tage, daß sie mittels zweier Pflöcke zu geschehen habe, dem Oberpflock und dem Unterpflock, die in einem Abstand zu schlagen waren, der sich „nach Gangs Fall und Zugs Länge“ richtete. Zwischen Oberpflock und Unterpflock lag dann das Grubenfeld. Seitliche Abgrenzung schrieb man hier übertage nicht vor. Diese Ver-

⁷⁾ Auch diesen Fall sieht das Sch. B. R. schon vor. (Wagner S. 170, drittletzter Absatz des Sch. B. R.) Man muß also schon um 1250 ziemlich tiefe Schächte gebaut haben.

pflöckung war auch noch 1553 in Niederösterreich und in Ungarn 1573 vorgeschrieben. Im Salzburgischen verpflöckte man 1532 vom Gestänge am Stollmundloch aus „nach Pirgs Fall“ die Vierung.

Aber anderwärts blieb das Verlochsteinen parallel dem Gangstreichen üblich. Wir finden die Verlochsteinung vorgeschrieben 1521 im bayrischen Herzogtum Sulzbach, 1536 im Herzogtum Sachsen, 1539 in Dänemark und Norwegen, 1548 in der Oberpfalz und in Joachimsthal, 1576 in der Grafschaft Hohnstein im Harz, 1590 in Baden, 1593 wieder im Harz, 1597 in Württemberg. 1617 begegnet sie uns nochmals im Harz. Ausgeführt wurde die Verlochsteinung zumeist durch die Berggeschworenen, manchmal durch den Bergmeister selber. 1617 hören wir, so weit ich gesehen habe, zum ersten Male von einem Markscheider, der einen Lochstein setzt. 1619 treffen wir den Zwang zur Verlochsteinung in der Markgrafschaft Brandenburg an, 1698 in der Berginformation des Freiberger Oberberghauptmanns v. Schönberg, 1759 bespricht Böhm in seiner „Meßkunst“ das Lochsteinsetzen an den beiden Enden eines Längenfeldes wie etwas Selbstverständliches. 1772 spricht die Halberstädter B. O. den Zwang zur Verlochsteinung von neuem aus, und zwar mit dem Zusatz: die in alten Zeiten vorgeschrieben gewesene Verlochsteinung sei allmählich abgekommen und habe mißbräuchlicher Weise einer Verpflöckung Platz gemacht. 1781 bestimmt die Kurpfälzische B. O.: jede Maß solle der Bergmeister mit besonderen Lochsteinen vermarken. Auf der einen Seite sollen die Lochsteine Schlägel und Eisen zeigen, auf der anderen Jahreszahl und Anfangsbuchstaben der Zeche. 1784 wird die Verlochsteinung von der B. O. für Bayern, Oberpfalz und Leuchtenberg verlangt. Das Preuß. A. L. R. 1794 schrieb keine Verlochsteinung mehr vor, und auch 1842 verlangt ein preußischer Kgl. Erlaß nur noch „äußerlich genau bezeichnete Grenzen“.

Aber mit dem Zwange zur Verlochsteinung hatte es immerhin folgende Bewandnis, durch welche der Zwang etwas erleichtert wurde. Bei Verleihung eines Grubenfeldes wurden zunächst die Grenzen des Feldes nur ganz überschlägig oder, wie man damals sagte: mit verlorener Schnur abgemessen. Von einer Vermarkung der Grenzen erfahren wir nichts. Erst wenn die Grube Ausbeute gegeben hatte und auch weiterhin eine genügende Ausbeute erhoffen ließ, so war sie, wie man sagte: „erbwürdig“ geworden und mußte sich unter besonderer Feierlichkeit exakt vermessen lassen, ein „Erbbereiten halten“, wie es hieß, und hierbei wurde verlochsteint. So wurde es im 16., im 17. und 18. Jahrhundert gehalten. 1794 bestimmte aber Preuß. A. L. R. und 1854 ein preuß. Allerhöchster Erlaß, daß das Erbbereiten im Belieben des Lehnträgers stehen solle.

Bei Geviertfeldern wurde im 18. Jahrhundert in jede Ecke ein Lochstein gesetzt.

Das Preuß. A. L. R. 1794 führte die Bestimmung ein, daß der mit einem Grubenfeld Belehnte eine amtliche genaue Vermessung vom Bergamt verlangen kann. Er muß sich aber die Vermessung gefallen lassen, wenn das Bergamt sie für nötig hält.

Abgrenzung unter Tage.

Die über Tage festgesetzten Grenzen nach Untertage zu übertragen, bereitete in alten Zeiten wegen der damals noch unentwickelten Meßkunst erhebliche Schwierigkeiten. Um 1250 sahen das Schemnitzer und das Iglauer Bergrecht den Fall vor, daß Zweifel aufkommen könnten, ob ein Lehenträger aus seinem Lehen gefahren sei. Dann sollte eine Kommission von vier ehrbaren Männern gewählt werden, die mit Hilfe der Bergschnur versuchen sollten, den Fall vermessungstechnisch aufzuklären. Aber beide Bergrechte sahen auch den Fall vor, daß der meßtechnische Versuch mißglücken könnte. Dann sollte der Durchschlag abgewartet werden, worauf denn die Ausmessung der Grenze in den Bereich der Möglichkeit rückte. Den geschehenen Durchschlag meldete der Steiger dem Schichtmeister, der Schichtmeister dem Bergmeister, und dann kamen die Froneboten oder die Berggeschworenen oder der Bergmeister selber, besichtigten den Durchschlag, prüften, ob der Durchschlag ein „Berckmanisch“⁸⁾ sei, und geboten zunächst Frieden. Die Grenze, Markscheide wurde darauf durch Messung hergestellt und durch ein sichtbares Zeichen kenntlich gemacht. Auf dessen Verletzung oder Unkenntlichmachung standen schwere Strafen. Von Fall zu Fall gewählte „getreue Leute“, welche in derartigen Fällen die Ausmessung der unterirdischen Grenzen übernahmen, waren in jenen alten Zeiten überall, nicht bloß in Schemnitz und Iglau, üblich. Das Grenzzeichen hieß Bidmarck und war oftmals ein in den Fels gehauenes Kreuz, eine sogenannte „Erbstufe“⁹⁾. Auch die Bezeichnung Markscheidstempel kommt vor. Vielleicht bedeutete das ein zwischen die Felswände fest eingesetztes Stück Balken. 1387 lernen wir für ein Stück Schmiedeeisen, wie es die Schinschmiede in den Schinhammerwerken herstellen, die Bezeichnung „Schin“ kennen. Ein solches Schin wurde als unterirdische Grenzmarke üblich unter der Bezeichnung „Teileisen“ oder „Schideisen“ oder „abschneident Eysen“ oder „Schin und Eisen“, „Myn und Schin“ oder „Myn und Schid“. Der „Schinner“, der 1463 in der Rattenberger B. O. wohl zum ersten Male vorkommt, befestigte das Schin auf der Grenze. Die beiden Nachbargruben waren dann miteinander „verschinnt“. So drückte man sich schon 1468 aus. Das Hinabbringen der Grenze von Übertage ins Gebirg, das in den ältesten Zeiten die Viermännerkommission besorgt hatte, war später Sache des Schinners, des Bergrichters oder des Bergmeisters selber.

So war die Grenzziehung unter Tage in der Regel. Mit der „Waage“, d. i. vermutlich der Kompaß, wurde einer der beiden Pflöcke von der überträgigen Abgrenzung „in den Gang gebracht“. So ist es für Tirol 1468 und 1490 bezeugt.

Aber es kamen auch andere Grenzfestsetzungen vor. In Tirol brachte nach Bestimmungen von 1468, 1490 und 1501 der Schinner zunächst im Durchschlag das „Eisen für“. Das war die vorläufige Grenzmarke, die

⁸⁾ Das Wort Berckmanisch wird unten erklärt werden.

⁹⁾ Erbstufe = Hauptstufe im Gegensatz zu den gewöhnlichen Stufen, mit deren Hilfe die Berggeschworenen den Bergarbeitern das Gedinge abzogen.

„Vorschinn“. 3 Klafter mußten sich die Parteien jetzt vom Durchschlag fernhalten. Dann wurde die Grenze genau festgestellt. Und nachdem das amtliche Urteil hinsichtlich der Grenze ergangen war, brachte der Schinner jetzt ein neues Eisen an die richtige Stelle. Die „Vorschinn“ aber wurde „verhaut“. Einfach im Durchschlag die Grube zu „verschinnen“, bestimmte die Niederösterreichische B. O. von 1553. Aber sie sah in Artikel 41 die Möglichkeit vor, daß diese abgekürzte robuste Grenzziehung zu Streitigkeiten führen könne. Dann sollte Entscheidung durch den Bergrichter und die Berggeschworenen herbeigeführt werden, und das in dem strittig gewesenen Teil der Grubenbaue gehauene Erz einstweilen besonders gestürzt werden. Später wurde das gehauene Erz dann gegen Erlegung der Gestehungskosten, der „Samkost“, demjenigen Nachbar ausgeliefert, dem das Gericht es zugesprochen hatte.

Ebenso bestimmte die ungarische B. O. Kaiser Maximilians II. von 1573: der Durchschlag bildet zunächst die Grenze. Der Schinner schlägt dort ein Eisen als Grenzmarke ein. Dabei bleibt es, wenn nicht ein besonderer Antrag gestellt wird. Auf Antrag wird aber die übertage festgelegte Grenze nach Untertage übertragen.

Hinsichtlich des Durchschlags war aber noch folgendes von wesentlicher Bedeutung. Ein „Gang“ in der Sprechweise des Bergmanns ist eine zumeist sehr lange und tiefe Spalte im Gesteinsmantel der Erde, die auf irgend eine Weise mit einer anderen Gesteinsmasse, der sogenannten Gangmasse, ausgefüllt worden ist. Befindet sich in der Gangmasse in wesentlicher Menge Erz, so spricht man von einem Erzgang. Vom Gange aus pflegen nun nach beiden Seiten hin, in die „ewige Gänz“ hinein, kürzere Querspalten auszugehen, die mit der gleichen Masse wie der Gang ausgefüllt sind. Solche Spalten heißen Klüfte. Der Bergbau ging also auf „Gängen und Klüften“ um, und nur auf ihnen oder doch höchstens $\frac{1}{2}$ Klafter abseits¹⁰⁾ sollte auch der Durchschlag zweier Nachbargruben erfolgen. Ein solcher Durchschlag hieß ein „Berckmanisch“. Nur auf ihm wurde „Schin und Eisen fürgebracht“.

Aber es kam vor, daß jeder der beiden Nachbarn heimlich darnach trachtete, dem anderen Erz zu rauben. Waren die Gruben schon verschint, so kamen sie am Schin nicht durch. Leib und Leben brachte in Gefahr, wer das Schin verletzte. Also umgingen sie die Verschinnung und arbeiteten entweder im Erzgange oberhalb des Schins¹¹⁾ oder seitwärts in das bis dahin unverritzte taube Gestein, in die „ewige Gänz“ hinein. Auch dabei konnten sie miteinander durchschlägig werden. Ein solcher Durchschlag galt als unbergmännisch. Myn und Schid brauchte auf ihm nicht zu geschehen. Er mußte aber „vermacht“ werden. Diese unbergmännischen Durchschläge kennt schon die steirische B. O. von 1336 oder 1346. Die Salzburger Bergordnungen von 1477 und von 1532 verboten sie grundsätzlich.

¹⁰⁾ Die ungarische B. O. von 1573 ließ noch 1 Klafter zu.

¹¹⁾ 1490 fand man es in Tirol, 1553 in Niederösterreich und 1573 in Ungarn nötig, dies ausdrücklich zu verbieten. 52 Pfund Berner Pfennige waren in Tirol 1490 als Strafe angedroht, wenn einer den andern „überhauen“ hatte. 1 Pfund, das waren 240 Pfennige.

Schweren Herzens wird man der gewöhnlichen Folge eines Durchschlags entgegengesehen haben: glühende nachbarliche Feindschaft pflegte dem Durchschlag auf dem Fuße zu folgen. Daß man der Nachbargrube freundnachbarlich Wasser, Gestank und Rauch zuleitete und heimlich durch den Durchschlag in die fremde Grube hineinkroch, um sie auszuspionieren, war noch das wenigste. Dennoch stand auch schon das Ausspionieren unter schwerer Strafe. „Derselbige, der unbefugter Weise in eines andern Grube gefahren ist, dem ist es getreten an den Hals“, sagt Hardanus Hake S. 22. So war es also in alten Zeiten im Harz. Ferdinand I. bestimmte 1544 für Tirol und die österreichischen Vorlande gar, daß, wer ein Bergwerk ausspioniert habe, auf einem zugespitzten Balken dreimal um den Schacht herumgetragen und dann kopfüber in ihn hineingestürzt werden solle¹²⁾.

Oftmals schlug man sich nach dem Durchschlag, bewarf sich und ging mit Waffen gegeneinander¹³⁾. Schon 1208 mußte der Trienter Bischof verbieten, Lanzen, Schwerter, Messer oder andere Waffen zum Durchschlag zu bringen. Speise und Trank durfte den kriegerisch gegeneinander gelagerten Bergleuten nicht zugetragen werden¹⁴⁾.

Im allgemeinen bestand also der Brauch, daß zwei Nachbargruben ruhig einander entgegenschlägeln, jeder Nachbar auf die Gefahr hin, dem anderen unwissentlich Erz zu rauben, ihn zu „enthauen“. Man wurde schließlich durchschlägig, und dann wurde die Grenze geregelt. Für die ersten unbeholfenen Anfänge der Meßkunst ist in diesem Verfahren ja nichts Auffälliges. Aber in die bergmännische unterirdische Meßkunst hatte im Harz schon zur Zeit Heinrichs des Löwen (1168) die Magnetnadel ihren Einzug gehalten, um 1200 in den Bergwerken von Massa Marittima. Der Aberglauben der damaligen Zeit, der geneigt war, in der Magnetnadel eine bedenkliche Erfindung des Teufels zu sehen, stand der Ausbreitung ihres Gebrauches sicherlich etwas im Wege, konnte aber ihre allmähliche Verbreitung dennoch nicht hindern. 1490 war der Kompaß in der bergmännischen Meßkunst eingebürgert. Daß man sich dennoch erst dann getraute, die oberirdisch festgelegte Grenze nach unter Tage zu übertragen, wenn der Durchschlag da war, hat etwas Überraschendes. Aber in der Tat sagte noch 1574 der Doctor Erasmus Reinhold, nachdem er in seinem Lehrbuch der Markscheidekunst die Messung und Berechnung eines Durchschlagzuges gezeigt hatte: „jedoch darfstu dich hierauff nimmer gentzlich und gewisslich verlassen . . . , bis solang solchs mit einem offnen Durchschlag bewiesen wird.“ Und noch 1617 sprach der Geheime Bergrat Löhneyss davon, daß man „einen Schacht an Tag bringt, daß man am Tage weiß, wo man in der Grube bauet“. Man muß hieran denken, dann versteht man, warum in alten Zeiten beiden Grubennachbarn erlaubt war, unbekümmert um die Grenze

¹²⁾ Srbik S. 150.

¹³⁾ Daß die Bergknappen in der Grube Waffen tragen, ist heute nicht mehr üblich. Aber: „Item so mögen die Erzknappen Ir Waffen und Wer tragen in dem Perch als von Alter herkommen ist“ — so hieß es in der B. O. für das Eisenerz in der Krems des Salzburger Erzbischofs 1401.

¹⁴⁾ Letzteres wurde in Tirol noch 1510 ausdrücklich verboten.

drauflos zu schlegeln, also den Nachbar zu „enthauen“, bis man durchschlägig wurde.

Man darf aber auch noch an folgendes denken: Zunächst brachte der Schinner die im Durchschlag befestigte Vorschinn an Tag, d. h. er projizierte sie lotrecht an die Erdoberfläche. Das war mit den damaligen Messungshilfsmitteln schon nicht ganz einfach. Sodann ändern aber auch noch die Gänge öfters ihr Streichen und Einfallen, und schließlich kam es auch noch vor, daß einer oder gar beide Nachbarn den Gang, mit dem sie belehnt waren, verlassen hatten und waren auf einen benachbarten Gang ausgequert, der gewinnreichere Ausbeute versprach. Ganz einfach war dann die Entscheidung über die Grenze in der Tat nicht.

Das Meiβner Bergrecht von 1406 enthält die Bestimmung: Niemand soll die Fundgrube des Nachbarn enthauen, und auch sie soll niemand enthauen. Man möchte als sicher annehmen, daß im Meiβnischen damals bereits der Kompaß im Bergbau üblich war, und man konnte daher mit seiner Hilfe die unterirdischen Grenzen auch schon festlegen, ehe es noch zum Durchschlagen kam. Allein der Kompaß wird im Meiβner Bergrecht von 1406 allerdings nicht erwähnt. Doch könnte das immerhin Rücksichtnahme auf die weitverbreitete damalige abergläubige Furcht vor der Magnetnadel sein. Es muß aber wohl unentschieden bleiben, wie jene Bestimmung des Meiβner Bergrechts gemeint war.

Überschar.

Es kam beim Bergbau häufig vor, daß zwischen zwei Nachbargruben auf einem Gange ein unverliehenes Gangstück lag, ein sogenanntes Bergfreies oder eine Überschar. Gegenüber einer solchen Überschar wurde es mit der Grenze auf besondere Weise gehalten. Die vermessungstechnische Unmöglichkeit, ohne Durchschlag über die Lage der Grenze ins Klare zu kommen, bildete dabei die Grundlage aller Bestimmungen. Es war infolge dieser Unmöglichkeit nicht zu vermeiden, daß in die Überschar von den Nachbarn hineingearbeitet und aus ihr Erz herausgeholt wurde. Das Schemnitzer Bergrecht ordnete um 1250 an, daß die Überschar allemal dem Urbürer, d. h. dem Vertreter des Landesherrn, zustehe. Wer aus der Überschar Erz fördere, der habe keinen Gewinn davon. Die gleiche Bestimmung galt 1280 in Böhmen. Das Iglauer Bergrecht bestimmte dagegen um 1250, daß das Erz der Überschar demjenigen der beiden Nachbarn zustehe, der es zuerst in maßwerter Menge zu einem offenen Schacht gebracht habe.

In der Folgezeit wurde es meist so gehalten: War die Überschar kleiner als ein Wehr, d. h. kleiner als 14 Lachter Ganglänge, so wurde sie gleichmäßig an die beiden Nachbarn aufgeteilt. Mehr als ein Wehr wurde besonders verliehen. So wurde es 1521 im bayrischen Herzogtum Sulzbach gehalten, 1539 in Dänemark und Norwegen, 1548 in Joachimsthal, 1576 in der Grafschaft Hohnstein im Harz, 1593 im Braunschweigischen. So setzte es 1617 die Bergordnung von Löhneyss fest und 1784 die B. O. für Bayern, Oberpfalz und Leuchtenberg.

Aber eine merkwürdige Ausnahme kam vor. Die Salzburger B. O. von 1532, die niederösterreichische B. O. von 1553 und die ungarische B. O. von 1573 bestimmten: wenn zwei Grenznachbarn innerhalb einer Überschar auf Klüften und Gängen miteinander durchschlägig wurden, so sollte die ältere Grube in ihr rechtes Maß verwiesen werden, und der jüngeren Grube solle die Überschar gehören.

Jüngere und ältere Grube.

Die auffallende Bevorzugung der jüngeren Grube vor der älteren hinsichtlich der Überschar findet sich in der Salzburger B. O. von 1532 und der niederösterreichischen von 1553 in schwer erklärlicher Weise auch sonst. Beide Bergordnungen bestimmten: War man durchschlägig geworden, so wurde zunächst im Durchschlag das Schin als vorläufiges Grenzeichen angebracht. Dann wurde der Fall berggerichtlich untersucht, und diejenige Grube, die dem Nachbar in dessen Lehen gefahren war, konnte vom Nachbar herausgetrieben werden (Salzb. B. O. 1532 § 14 und N.-Ö. B. O. 1553 Artikel 34 und 35). Aber dann kommt im Widerspruch hiermit in beiden Bergordnungen die uns verblüffende und empörende Bestimmung (Salzb. B. O. § 16; N.-Ö. B. O. Art. 48): war die jüngere Grube der älteren in ihr Lehen gefahren, so durfte sie alle erbauten Örter und die Fördernis behalten ohne Entgelt für die ältere Grube. „Wie Perckwerchs Recht ist“, sagt dazu kühl die Salzburger B. O. Also entsprach diese Nichtachtung der verliehen gewesenen Grenzen offenbar dem allgemeinen damaligen Rechtsempfinden der verleihenden Behörden. Vermutlich sollte die Vergewaltigung der Grenze wohl eine Strafe sein für die Säumigkeit der älteren Grube, die die Möglichkeit der Erzförderung aus ihrem Lehen nicht genügend ausgenützt hatte. Für die Bergbehörde, der aus den Erträgen der Erzförderung die „Urbur“ zufloß, war das immerhin ein empfindlicher Ausfall an Einnahmen.

Vielfach stellte sich folgende Schwierigkeit der unterirdischen Abgrenzung heraus: Auf zwei benachbarten Gängen hatten Verleihungen stattgefunden. In der Tiefe kamen die Gänge zusammen oder fielen doch wenigstens einander in die Vierung. Wie verhielt es sich in der Tiefe mit der Abgrenzung? Ganz allgemein galt dann der Grundsatz: „Der jüngere weicht dem älteren.“ Diesen Grundsatz finden wir 1539 in Dänemark und Norwegen, 1548 in Joachimsthal, 1616 im Hessen-Casseler Bergbau, 1617 im Harz, 1698 im Freiberger Bergbau, 1784 in Bayern und 1794 im Allgem. Preuß. Landrecht.

Tiefe der Gruben.

Die Abgrenzung eines Grubenfeldes nach der Tiefe zu nannte man eine „flache Markscheide“. Sie kam nur da vor, wo auf einem Gange mehrere Gruben untereinander bauten. Das geschah allerdings schon früh. Schon um 1250 treffen wir auf die flache Markscheide, wie bereits erwähnt, im Schemnitzer Bergbau, 1308 im Schladminger Bergbrief, 1477 im Salzburgischen, 1490 im Schwazter Bergbau. Im allgemeinen wurde bei Verleihung eines Grubenfeldes über dessen Tiefenerstreckung nichts festgesetzt. Sie blieb dem Belieben des Belehnten überlassen. Jeder durfte so tief bauen als er wollte: bis etwa eine

andere Grube kam, die besseres Recht hatte. So war es im Schemnitzer Bergbau um 1250. Auch im Iglauer Bergrecht wird über die Tiefe der Verleihung nichts gesagt. Ob Herzog Albrecht von Braunschweig etwa 1271 in der S. 3 erwähnten Bergordnung eine Maximaltiefe von 7 Fuß hat vorschreiben wollen, wissen wir nicht recht. Auch das Meißner Bergrecht von 1406 sagt über die Tiefe nichts. Ebenso die Pfalz-Zweibrückner B. O. von 1514. Die allgemeine Auffassung ging in jenen Zeiten sicher dahin, daß man auf dem verliehenen Gange beliebig tief bauen dürfe. So steht in einer Aufzeichnung des herrschenden Gewohnheitsrechts, die nach Niederwerfung der Hussiten niedergeschrieben wurde: „ein jeder Gang hat in ewige Tieffe vierdehalb Lachter ins hangende und vierdehalb Lachter ins liegende, das heist des Gangs Vierung“¹⁵⁾.

Aber 1490 verlieh man in Tirol 13 Bergklafter oder 15 im Saiger. Und aus der B. O. Kaiser Maximilians I. von 1517 für Österreich, Steiermark, Kärnten, Krain lernen wir, daß auch in diesen Landen vor 1517 stellenweise Verleihung der Grubenfelder bis zu „10 Klafter im Saiger“ oder „15 Klafter im Saiger“ üblich geworden war. Die B. O. bestimmte, daß künftig überall 15 Klafter im Saiger gegeben werden sollten.

Die Abgrenzung bis zu einer bestimmten Tiefe kommt in der Folgezeit mehrfach vor, wurde aber nicht allgemein üblich. 1532 verlieh man im Salzburgischen die Längenfelder bis zu 20 Klafter im Saiger; die Verleihungen nach Schachtrecht gaben 20 Klafter „nach Kluft oder Gangs Fall“. 1548 verlieh man in der bayrischen Oberpfalz die Längenfelder ausdrücklich „bis in ewige Tieff“. 1553 verlieh man in den niederösterreichischen Landen 17 Klafter im Saiger.

Für den Kärntner Bergbau gibt es drei Bergordnungen von 1494, 1567 und von 1759. Die von 1494 ist mir nur bekannt aus einer kurzen Erwähnung bei Klostermann, Preuß. Bergrecht 1871, S. 20¹⁶⁾. Auskunft über den Inhalt der beiden letzten gibt Münchsdorfer, Geschichte des Hüttenberger Erzbergs, Klagenfurt 1870. Danach wurden 1567 im Kärntner Bergbau konkordante Grubenfelder bis in die ewige Tiefe hinab verliehen. Es waren, wie schon erwähnt, Geviertfelder von 20 Klafter Länge im Streichen der Lagerstätte und 20 Klafter Vierung. 1759 hob Maria Theresia die Verleihung bis in die ewige Tiefe auf. Nur noch bis zu 200 Klafter Tiefe wurde verliehen. Doch wurde die Grundfläche, das Geviertfeld, gleichzeitig von 20×20 Klaftern auf 40×40 Klafter gebracht¹⁷⁾.

1570 verlieh die Homburgische B. O. „in ewige Tiefe 84 Lachter“ bei Eisensteingruben, bei anderen Metallen „in ewige Tiefe 42 Lachter“.

Die ungarische B. O. bestimmte 1573, daß die nach Stollnrecht verliehene Fundgrube 4 Schnüre oder Lehen im Saiger haben solle, wobei 1 Schnur gleich 1 Lehen gleich 7 Bergklafter zu rechnen ist. Eigentümlicherweise bestimmte

¹⁵⁾ Zunners Bergbuch 1698: Von Ursprung dess Bergwerks.

¹⁶⁾ Wagners Corpus juris metallici enthält sie nicht.

¹⁷⁾ Krünitz (Bd. 84, 1801, S. 508) spricht über diese Verleihung, hat aber den Sachverhalt wohl mißverstanden. Die Theresianische Berg-, Deutschhammer- und Radwerksordnung von 1759 ist unter den übrigen Gesetzen der Maria Theresia publiziert.

dieselbe B. O., daß die Kopfmarkscheiden, damals stehende Markscheiden genannt, bezeichnet durch Kreuze, die an beiden Enden des Grubenfeldes „auf die Stund der Zwerch“ eingehauen sind, in die ewige Tiefe gehen sollen. Die nach Schachtrecht verliehenen Gruben dagegen, die also durch einen „Hangendschacht“ oder „Richtschacht“ abgebaut werden, bauen dem Gange entlang in die „ewige Teuff“.

Von da ab scheint Verleihung bis in die ewige Teufe allgemein üblich geworden zu sein.

1590 verleiht man im Badischen auf flach klüftigen Gängen und Stockwerken Geviertfelder „unter sich in die ewige Teufe“.

Ebenso werden nach Löhneyss 1617 Fundgrube und Maßen bis in die ewige Teufe verliehen.

Ausdrücklich erwähnt wird die Verleihung bis in „ewige Teuffe“ oder „ewige Tiefe“ auch noch 1619 in der Brandenburgischen B. O. und in der Pfälzer Bleibergwerksordnung, 1698 in der „Berginformation“ und 1759 in Böhms Meßkunst. Preuß. ALR. 1794 sagt nichts über die Teufe, bis zu welcher verliehen wurde.

Diskordante Grubenfelder.

In Böhms Meßkunst 1759 wird auf S. 275 gesagt, daß auf schwebenden Gängen, Flözen und Stockwerken Geviertfelder verliehen werden. Deren Grenzen, sagt Böhm, sind in jeder Teufe „seiger“, also lotrechte Ebenen. Dies sind die ersten diskordanten Grubenfelder, die mir sicher bekannt geworden sind¹⁸⁾. 1784 sagt die bayrische Bergordnung in Artikel 59: „Stockwerke und Flöze haben geviertes Feld und ihre Gerechtigkeit seiger gerad nieder.“ Das ist der zweite mir sicher bekannt gewordene Fall eines diskordanten Grubenfeldes. Das französische Berggesetz von 1810 führte dann für das ganze linksrheinische Gebiet die lotrechten Ebenen bis in die ewige Tiefe, also die diskordanten Grubenfelder ein. 1821 wurde für das rechtsrheinische Gebiet des damaligen Preußen mit Ausnahme des Kreises Wetzlar die Geviertvermessung mit lotrechten Ebenen bis in die ewige Teufe für flach liegende Ablagerungen eingeführt. Doch sah das Gesetz daneben auch noch die Verleihung nach Längenfeldern vor. 1852 wurden im Königreich Sachsen die bis dahin konkordanten Längenfelder in diskordante Felder umgewandelt und dabei auf Staatskosten verlochsteint. 1865 bestimmte das Allgem. Preußische Berggesetz für die ganze preußische Monarchie, daß künftig alle Markscheiden lotrechte Ebenen bis in die ewige Teufe sein sollten. Verlochsteinung wurde nicht mehr vor-

¹⁸⁾ Wahrscheinlich kommt aber das diskordante Grubenfeld schon viel früher vor, z. B. in der obengenannten Badischen Bergordnung von 1590, Ziffer XII. Wir nennen heute schwebend und flach fallend Gänge, deren Einfallen zwischen 0° und 45° liegt. Bei 45°—90° Einfallen sprechen wir von tonnlägigen steilen oder seigeren Gängen. So waren die Bezeichnungen schon 1759. Aber im 16. Jahrhundert unterschied man nur stehende und flache Klüfte oder — wie die genannte Badische B. O. — streichende und flache Klüfte. Die B. O. bestimmt nun: wo die Fundgruben flach klüftig sind und das Erz stockweise liegt, sollen Geviertfelder verliehen werden: „über sich zu Tag aus, unter sich in die ewige Teufe.“ Damit kann wohl nur ein zu den flachen Klüften diskordantes Grubenfeld gemeint sein.

geschrieben. Die gleiche Bestimmung traf 1869 auch das Bayrische Allgem. Berggesetz. Bei diesen Bestimmungen über die Grubengrenzen ist dann auch in der Folgezeit die neuere Gesetzgebung geblieben.

Eine wohl begründete Ausnahme bildete 1906 die kaiserlich deutsche Bergverordnung für die afrikanischen und Südsee-Schutzgebiete mit Ausnahme von Deutsch-Südwest-Afrika: wer ein Schürffeld als Bergbaufeld belegen wollte, mußte die Ecken vermarken durch Pfähle von wenigstens 1 m Höhe oder durch Steinmale mit Aufschrift.

Hier mußte dauerhafte Vermarkung verlangt werden, weil der Lageplan, der der Verleihung zugrundegelegt wurde, nicht auf Vermessung zu beruhen brauchte.

A b g e k ü r z t a n g e f ü h r t e S c h r i f t e n .

Hardanus Hake: Bergchronik des Harzgebietes. In: Forschungen zur Geschichte des Harzgebietes, Bd. 2, Wernigerode 1911.

Krünitz: Ökonomisch-technologische Enzyklopädie.

Lori, J., G.: Sammlung des bayrischen Bergrechts, München 1764.

Müller-Erzbach: Bergrecht Preußens und des weiteren Deutschlands, 1917.

Preuß. ALR. 1794: Preußisches Allgemeines Landrecht von 1794.

Srbik, R. v.: Bergbau in Tirol und Vorarlberg. In: Berichte des naturwiss.-medizin. Vereins Innsbruck 1929.

Wagner, Th.: Corpus juris metallici, Leipzig 1791.

Ergänzungsgeräte zu einem Feldphototheodolit für Nahaufnahmszwecke.

Von Professor Ing. Dr. techn. K. Za a r, Graz.

Der Verfasser erinnert sich lebhaft an die vor etwa 20 Jahren erfolgte erste Begegnung mit unserem Altmeister, Hofrat Dr. D o l e ž a l, die durch eine photogrammetrische Erstlingsarbeit veranlaßt war. Der hervorragende Gelehrte und Lehrer kam hiebei unter anderem auch auf die vielseitigen Verwendungsmöglichkeiten des Lichtbildes im technischen Unterricht zu sprechen, wobei er der Meinung Ausdruck gab, daß der Photographie als einschlägigem Hilfs- und Bildungsmittel noch viel zu wenig Beachtung geschenkt werde. Das Gespräch übte einen nachhaltigen Eindruck auf den Verfasser aus und, den gegebenen Anregungen folgend, führte es zu einer vertieften Beschäftigung mit den theoretischen und praktischen Verwertungsmöglichkeiten des Lichtbildes für technische Zwecke. Auch die nachfolgende Studie gilt diesem Thema, dessen Behandlung sich auf Versuche stützt, die vor Jahren, mit allerdings primitiven Behelfen, ausgeführt wurden.

In der Geländephotogrammetrie werden Aufnahmsgeräte verwendet, deren Kameragehäuse starr ist. Diese Ausführungsform, welche die Konstanz der Bildweite gewährleistet, ist durch das Zusammenfallen der Bildebene mit der Brennebene ermöglicht. Die für den Feldgebrauch bestimmten Aufnahmsgeräte sind daher für Nahaufnahmen unbrauchbar. Letztere erfordern im allgemeinen Kammern, bei denen die Bildebene entsprechend der jeweiligen Gegenstandsweite eingestellt werden kann. Einschlägige Präzisionsapparate sind hauptsächlich für stereophotogrammetrische Zwecke gebaut worden. Solche stereoskopische Doppelkammern mit veränderlicher Bildweite sind z. B. die Stereometerkamera von Pantofliček (Heyde), jene von Pulfrich (Zeiss), Selke (Zeiss) u. a. Die Auswertung erfolgt hiebei zweckmäßig mit besonderen Ausmeßgeräten; ein solches ist beispielsweise das Stereometer von Pulfrich-Zeiss.

Aus dem Bestreben heraus, ein für den Feldgebrauch bestimmtes Instrumentarium wenigstens teilweise für Nahaufnahmen dienstbar zu machen und die hiebei erhaltenen Photogramme mit Hilfe des Stereokomparators, bzw. mit mechanischen Auswertegeräten bearbeiten zu können, entstanden die nachfolgend beschriebenen Zusatzgeräte zum Phototheodolit Wild (Heerbrugg). Diese Geräte, die der Verfasser von der Firma Wild herstellen ließ, bestehen aus einem mikrometrisch verschiebbaren Schlitten und einer Nahkamera. Letztere hat die gleiche Form und dieselben Ausmaße wie die normale Fernkamera der genannten Ausrüstung (Bildformat 10/15), ist aber mit einem besonderen, von Dr. Wild errechneten, unsymmetrischen Objektiv von zirka 15 cm Brennweite ausgerüstet. Da die konstante Bildweite der Kamera der Brennweite der Fernkamera gleichgehalten ist, also rund 16,5 cm beträgt, kommt eine mittlere Aufnahmdistanz von etwa 150 cm in Betracht. Das zulässige Maß der Unschärfe in der Abbildung von Punkten, die sich außerhalb der Einstellebene befinden, bestimmt die Größttiefe des Aufnahmsgegenstandes.

Die hier vorliegende Konstanz der Bildweite schränkt sonach die Verwendbarkeit der Nahkammer ein, die allerdings in ihrer starren Form den eingangs erwähnten Vorzug gegenüber einer Balgkamera besitzt. Ihre Bedienung unterscheidet sich nicht von jener der Fernkammer; sie wird gleich dieser in das Stahlgehäuse des Wild'schen Phototheodolits eingehängt. Abb. 1 gibt den Anblick des für eine Aufnahme bereitgestellten Instrumentenaggregates, dessen zweiter Bestandteil, wie bereits angeführt wurde, ein Präzisionsschlitten ist, der das auf seine Tragplatte aufgelegte Aufnahmsobjekt mit einer Genauigkeit von 0·01 mm zu verschieben gestattet. Das trapezförmig ausgebildete Trag-

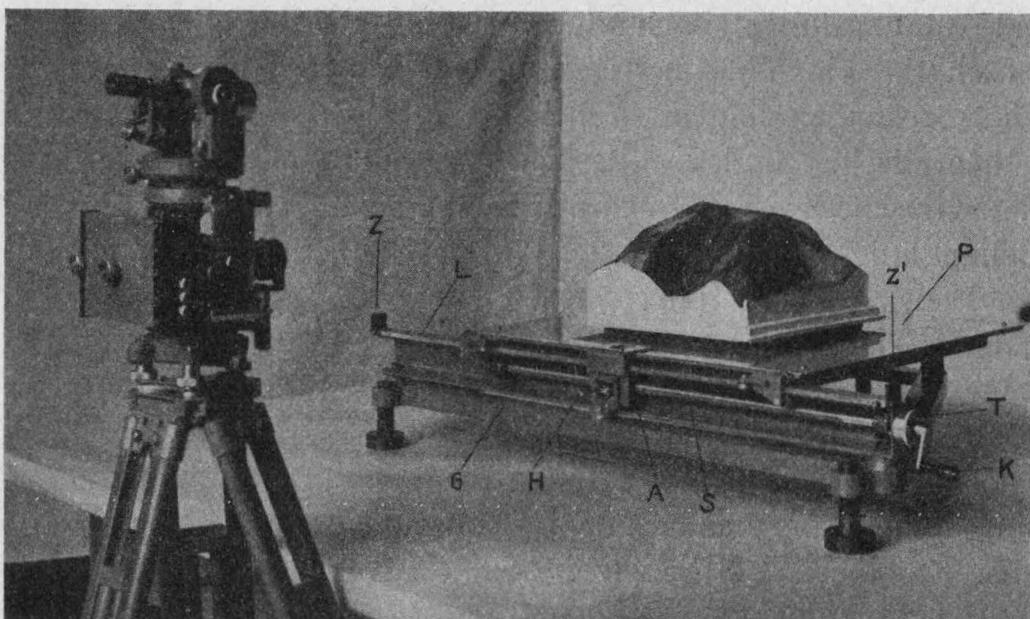


Abb. 1.

gestell *G* des Schlittens besitzt drei auf Unterlagsscheiben aufsitzende Stellschrauben, mit welchen die aus Leichtmetall gefertigte Tragplatte *P* horizontiert wird. Auf der Langseite des Tragrahmens ist eine *U*-Schiene befestigt, welche oben ein allseitig parallel geschliffenes Stahllineal *L* als Führung der Kugellager trägt. In der *U*-Schiene ist eine Präzisionsspindel *S* mit 1 mm Schraubensteigung eingebaut. Die Mutter dieser Spindel ist durch den Hebel *H* auslösbar, damit die Tragplatte von Hand aus verschoben werden kann. Die Ablesung der cm und mm geschieht an einem Zeiger bei *A* an der an dem Lineal angebrachten Teilung, während die Feinstellung des Schlittens mit der Kurbel *K* bewirkt wird. Die in 100 Teile geteilte Trommel *T* lässt die Ablesung von Hundertelmillimeter zu, während noch 0·002 mm geschätzt werden können.

Ehe über die Verwendungsmöglichkeiten der Zusatzgeräte berichtet wird, soll zunächst einiges über die Bestimmung der Bildweite und die zweckmäßigste Anordnung der Aufnahme vorgebracht werden.

Von den für die Ermittlung der Bildweite *b* in Betracht kommenden Methoden hat die nachfolgend beschriebene den Vorteil, daß sie einfach ist und sich auf exakt zu messende Größen stützt.

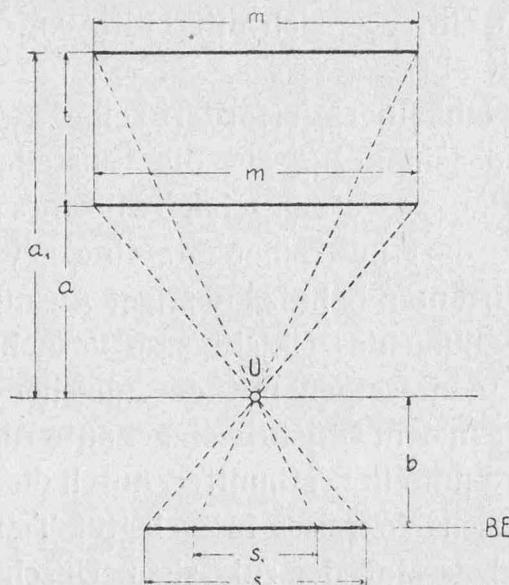


Abb. 2.

Werden zwei gleich große, parallel zur Bildebene angenommene Strecken m mit den bezüglichen Gegenstandsweiten a und a_1 photographiert, so liest man, unter Heranziehung der Streckenabbildungen s und s_1 aus Abb. 2 heraus:

$$a = \frac{m \cdot b}{s}, \quad a_1 = \frac{m \cdot b}{s_1}$$

$$a_1 - a = t = \frac{m \cdot b (s - s_1)}{s \cdot s_1}$$

$$\text{Hieraus die Bildweite } b = \frac{t \cdot s \cdot s_1}{m \cdot (s - s_1)}$$

Für die praktische Durchführung wählt man zweckmäßig als abzubildende Strecke m einen geeichten, parallel zur Bildebene angeordneten Maßstab, der nach erfolgter Erstaufnahme parallel um das Maß t verschoben und nochmals photographiert wird. Die Parallelverschiebung kann mit Hilfe des beschriebenen Schlittens sehr genau vorgenommen werden, während die Messung der Strecken s und s_1 mit einem Photokoordinatometer mit der erforderlichen Schärfe bewerkstelligt wird. Der mittlere Fehler der Bildweite ergibt sich mit

$$\mu_b = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial t} \mu_t\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial s} \mu_s\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial s_1} \mu_{s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial m} \mu_m\right)^2}$$

Setzt man die mittleren Fehler der Ableitungsgroßen gleich:

$$\mu_t = \mu_s = \mu_{s_1} = \mu_m = \mu \text{ (z. B. } 0.01 \text{ mm}),$$

so erhält man nach Weiterbehandlung obiger Formel:

$$\mu_b = \pm \frac{\mu}{m^2 (s - s_1)^2} \sqrt{[s \cdot s_1 (s - s_1)]^2 (m^2 + t^2) + (m \cdot t)^2 (s^4 + s_1^4)}$$

Überschüssige Beobachtungen würden natürlich diesen zu erwartenden Fehler entsprechend herabmindern. Eine nach der besprochenen Methode vorgenommene einzelne Bestimmung der Bildweite der Nahkamera ergab $b = 165.26 \text{ mm} \pm 0.16 \text{ mm}$. Hierbei wurden, behufs Genauigkeitssteigerung, die beiden photographischen Abbildungen s und s_1 des Maßstabes m auf ein

und dieselbe Platte gemacht, was sich mit Hilfe von dunklen Hintergründen (Samt) leicht ausführen läßt.

Die vorliegende Nahkamera erfordert eine zweckmäßige Aufstellung des Aufnahmsgegenstandes in bezug auf die Einstellebene. Denn nur die in dieser Ebene gelegenen Punkte werden scharf, alle anderen unscharf abgebildet. Das Maß der Unschärfe darf nun einerseits eine gewisse Größe nicht überschreiten, andererseits wird man behufs günstiger Ausnützung der Tiefenschärfe des Objektives die Aufstellung des Objektes so vornehmen, daß die nächsten und entferntesten Punkte desselben mit der gleichen (zulässigen) Unschärfe abgebildet werden. Da die in dem Objektiv eingebaute Blende keine Veränderung ihrer Öffnung zuläßt, wird nur ein bestimmter, durch die Festsetzung der höchstzulässigen Größe des Unschärfekreises festgelegter Tiefenbereich bei der Aufnahme verwertbar sein. Das Maß der zulässigen Unschärfe ist von dem Zweck der Aufnahme und den Genauigkeitsansprüchen abhängig. Die in der praktischen Photographie im allgemeinen mit 0·1 mm angenommene Größe des Durchmessers des Unschärfekreises wird im vorliegenden Fall, wo eine Plattenbearbeitung unter der Lupe, bzw. unter dem Mikroskop in Betracht kommt, entsprechend einzuengen sein.

Abb. 3 illustriert die aus der Forderung gleich unscharfer Abbildung der nächsten und weitesten Objektspunkte P_v und P_r zugrundeliegenden Ab-

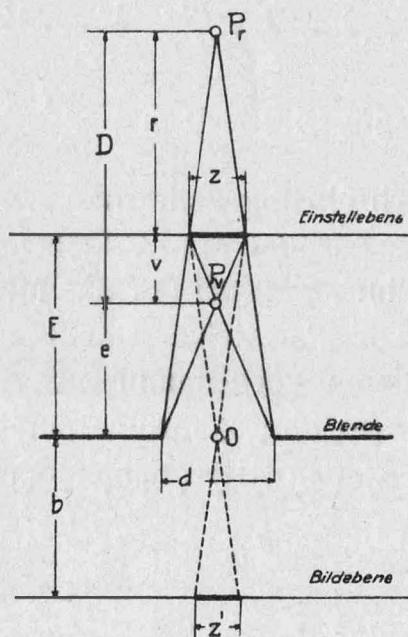


Abb. 3.

bildungsverhältnisse. Die genannten Punkte werden von der Blende aus (Eintritts- und Austrittspupille zusammenfallend angenommen) in die in der Entfernung E befindliche Einstellebene als Kreisfläche mit dem Durchmesser z projiziert. Aus der Abb. 3 ergeben sich nachfolgende Beziehungen:

$$\frac{d}{z} = \frac{E+r}{r}, \quad \frac{d}{z} = \frac{E-v}{v} \quad \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Die Gleichsetzung der rechten Seite der Gleichungen ergibt unter Berücksichtigung von $v + r = D$

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{D+E}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2} \\ r &= \frac{D-E}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad 2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man den Durchmesser z des Unschärfekreises in der Einstellebene mit:

$$z = \frac{D+E-\sqrt{D^2+E^2}}{E-D+\sqrt{D^2+E^2}} \cdot d = \frac{D-E+\sqrt{D^2+E^2}}{E+D+\sqrt{D^2+E^2}} \cdot d \quad \dots \dots \quad 3)$$

Das objektseitige Abbild der Punkte P_v und P_r , d. i. also eine Kreisfläche mit dem Durchmesser z , wird nun, wie alle der Einstellebene angehörenden Gebilde, im Verhältnis $\frac{b}{E} = k$ ähnlich abgebildet. Die Punkte P_v und P_r werden sonach in dem Photogramm als Kreisflächen mit dem Durchmesser $z' = \frac{b}{E} \cdot z = k \cdot z$ erscheinen. z' ist von z , also auch von D , d. i. die Objektstiefe, abhängig. Bedeutet z' den Durchmesser des zulässigen Unschärfekreises, so ist durch seine Festlegung auch schon die Größt Tiefe des Aufnahmsgegenstandes bemessen. Für das praktische Arbeiten ist es zweckmäßig, die Abhängigkeit zwischen D , v (bzw. r) und z' in einem Graphik zur Anschauung zu bringen. Ein solches liegt in Abb. 4 für die hier beschriebene Nahkamera vor; die D -Werte bilden die Abszissen, die Werte für z' , bzw. $(E-v)$ [das sind die Entfernung der dem Objektiv am nächsten befindlichen Punkte des Objektes] die Ordinaten, wobei die bezüglichen linken, bzw. rechten Ordinatenmaßstäbe zu verwenden sind.

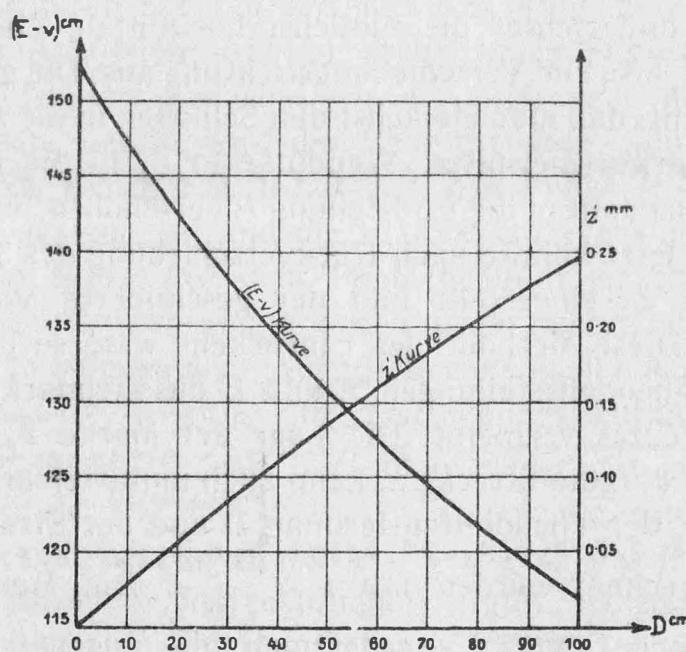


Abb. 4.

Man ersieht beispielsweise aus dem Diagramm, daß ein Objekt von 30 cm Tiefe (wie es in dem in Abb. 1 ersichtlichen Geländemodell vorliegt) bezüglich seiner nächsten Punkte zirka 138 cm vom Objektiv entfernt zu stellen ist und

daß die nächsten und weitesten Punkte mit einer Unschärfe von zirka 0'08 mm abgebildet werden.

Nunmehr mögen Erörterungen betreffend den Gebrauch und die Anwendungsmöglichkeiten der geschilderten Zusatzgeräte folgen. Die Einstell-distanz (151 cm vom vorderen Linsenscheitel) ist so gewählt, daß sie eine möglichst vielseitige Ausnützung der Nahkamera erwarten läßt. Die mit ihr erhaltenen Einzelbilder lassen alle Auswertungen zu, die sich in bekannter Weise auf photogrammetrisch adjustierte Bilder stützen. Es bereitet aber keine Schwierigkeit, auch Bilderpaare herzustellen, deren Teilbilder gemeinsam zur Auswertung verwendet werden. Hiebei kommen natürlich in erster Linie die mit parallelen Achsen erzeugten Normalstereogramme in Betracht. Diese werden in der Weise hergestellt, daß man nach erfolgter Erstaufnahme des Objektes eine Verschiebung desselben senkrecht zur optischen Achse des Objektives vornimmt und eine zweite Aufnahme macht. Die Teilbilder entsprechen einer Stereoaufnahme (Normalfall), bei der die Basis der Objektverschiebung gleichkommt.

Da die Kamera und der Schlitten nicht in fester Verbindung stehen, ist eine gegenseitige Orientierung beider Geräte notwendig. Eine solche kann bei geringeren Genauigkeitsansprüchen unter Benützung der einfachen Zielvorrichtung (Absehen) durchgeführt werden, die 15 mm von der äußeren Kante der Schiene parallel zur Verschiebungsrichtung vorgesehen ist (siehe Abb. 1, $Z - Z'$). Legt man auf eine möglichst genaue Parallel-, bzw. Senkrechtstellung der Verschiebungs-(Basis-)richtung zur optischen Achse des Objektives Wert, so kann dies mit Benützung eines einfachen Hilfstheodolites in folgender Weise geschehen: Man stellt (siehe Abb. 5) diesen Theodolit in die Mitte der horizontalen Tragplatte und richtet die tunlichst horizontale Zielachse annähernd parallel zur Spindel, also zur Verschiebungsrichtung aus. Die genaue Parallelität wird dadurch erreicht, daß man zunächst den Schlitten in die Anfangsstellung A bringt und eine Marke (Zielspitze, Wandmarke) Z_1 in die Ziellinie einrückt. Hierauf wird der Theodolit in die Endstellung E verschoben, worauf die Markensetzung Z_2 erfolgt. Jetzt könnte nach Rückverschiebung des Theodolits nach A die Zielachse nach Z_2 eingestellt und der geschilderte Vorgang wiederholt werden; (Z_3) usw. Diese Methode des Einrückens wäre so lange fortzusetzen, bis in den beiden Theodolitstellungen A und E die Zielmarke Z_0 am Vertikalfaden des Fadenkreuzes verbleibt. Die Lage der Marke Z_0 , bezogen auf die Ausgangsmarke Z_1 , d. i. die Strecke x , kann auch unmittelbar aus dem Markenabstand $\overline{Z_1 Z_2} = m$, der Theodolitentfernung D und der Strecke \overline{AE} , d. i. die Verschiebung v errechnet werden mit $x = \frac{D \cdot m}{v}$. Die Marken Z_1 , Z_2 usw. sind hiebei auf einer Geraden angenommen, die angenähert senkrecht zur Verschiebungsrichtung ist. Die erforderlichen Schlittenverschiebungen werden mit Benützung des Hebels H (siehe Abb. 1) ausgeführt. Die Gerade $A - E - Z_0$ ist nun genau parallel zur Spindel des Schlittens. Wäre die Achse der horizontalen Aufnahmskamera zu letzterer parallel zu richten, so könnte dies so geschehen, daß man den Phototheodolit mit Hilfe seines in die Nullstellung

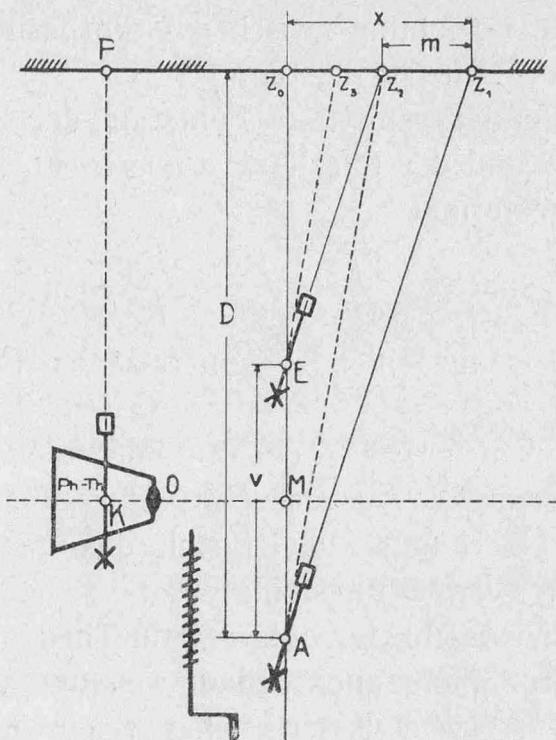


Abb. 5.

gebrachten Fernrohres in die Gerade $A - Z_0$ einrückt, die durch Z_0 und eine einzuvisierende Zwischenzielmarke festgelegt wird. Die hiebei vorliegende Orientierung der Kamera gegenüber dem Schlitten käme beispielsweise für die an früherer Stelle beschriebene Bildweitenbestimmung in Betracht. Sollen aber Kameraachse und Verschiebungsrichtung aufeinander senkrecht stehen, wie es für eine Stereoaufnahme notwendig wird, so kann folgender Weg eingeschlagen werden: Nach Setzung der Marke Z_0 bringt man den Hilfstheodolit in die Mittelstellung M (siehe Abb. 5), dreht dessen Fernrohr um 90° , worauf die annähernd horizontale Zielachse wieder durch zwei Marken fixiert wird. In die so bezeichnete Gerade wird der Phototheodolit, ähnlich wie früher angegeben, eingerückt. Es wäre auch möglich, den Punkt P unter Berücksichtigung $KM = PZ_0$ festzulegen und die zu KP senkrecht stehende Aufnahmearchse in bekannter Weise mit dem Phototheodolit zu bestimmen. Die vorstehend angegebenen Orientierungsarbeiten gehen nach einiger Übung ziemlich rasch vonstatten. In sinngemäßer Abänderung kann der Achse der Aufnahmekamera jede gewünschte Neigung zur Verschiebungsrichtung erteilt werden.

Die mit dem beschriebenen Instrumentenaggregat gewonnenen Stereobildpaare können in der üblichen Weise im Stereokomparator oder in mechanischen Auswertegeräten bearbeitet werden. Bezuglich des Maßes der Verschiebung, welche die Basis der Stereoaufnahme ergibt, ist zu beachten, daß zur einwandfreien Erzielung eines räumlichen Effektes im Stereoskop gewisse Grenzen gesetzt sind. Bei Vorhandensein zu großer Parallaxen erhält man bekanntlich Doppelbilder ohne räumliche Wirkung. Unter Berücksichtigung einer zulässigen größten Parallaxe (Winkeldifferenz, die etwa mit 70 Minuten angenommen werden kann), läßt sich der Größtwert der Basis (Verschiebung) bei bekannter Tiefe des Objektes leicht berechnen. Auch hiebei wird ein

Graphikon, welches die Beziehung zwischen Größtbasis und Objektstiefe zur Anschauung bringt, gute Dienste leisten.

Nimmt man an, daß der mittlere Fehler in der Bildweite b , jenen der Basis (Verschiebung) B und der Parallaxe a überwiegt, so liefert die Differenzierung der Entfernungsformel

$$E = \frac{B \cdot b}{a} \text{ nach } b \quad \frac{dE}{db} = \frac{B}{a} = \frac{E}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{dE}{E} = \frac{db}{b}$$

d. h. der relative Entfernungsfehler ist dem relativen Fehler in der Bildweite gleich.

Es sei weiters andeutungsweise erwähnt, daß sich die Verbindung Nahkamera—Schlitten zweckmäßig für das Körpermessungsverfahren mit Lichtschnittebenen eignet. Überhaupt erweist sich das Instrumentarium für das Laboratorium vielseitig verwendungsfähig.

Ein auf dem Präzisionsschlitten aufgesetzter Theodolit (mit Einstellbarkeit auf nahe Distanzen) ermöglicht auch genaue Messung von Strecken, die sich unmittelbar schwierig erfassen lassen. Hier seien beispielsweise erwähnt: Durchmesserbestimmungen von Eintritts- und Austrittspupillen bei Objektiven, Abstandsermittlungen von Marken usw.

Schließlich möge noch der guten Verwendbarkeit des beschriebenen Instrumentenaggregates im photogrammetrischen Unterricht gedacht werden. Wählt man als Aufnahmsobjekt ein genau nach einem Schichtenplan hergestelltes Geländemodell (siehe Abb. 1), so können je nach Aufstellung desselben und der gewählten Aufnahmsart, die Methoden der Erd- und Luftbildmessung im Zimmer nachgeahmt und die Ergebnisse einer entsprechenden Auswertung zugeführt werden. Die Möglichkeit einer unmittelbar an dem Modell, bzw. an dessen Schichtenplan vorzunehmenden Kontrollmessung erhöht den Wert der Zimmerarbeit, mit der eine Vorbereitung für die praktische Feldarbeit gedacht ist.